

DS4

Calculatrice non autorisée, durée : 4 heures

Le sujet comporte 3 pages. Les 4 exercices sont indépendants.

- Bien lire tout le sujet avant de commencer. Traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
- Justifier toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et s'assurer que :
 - Vous n'avez pas d'emblée affirmé que la propriété à démontrer est vraie (sans justifier). Posez-vous les bonnes questions : je sais que ? ou je cherche quand ou qui ?
 - Le raisonnement est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire (en maths comme en français).
 - Les liens logiques (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, ...) sont utilisés et utilisés à bon escient.
 - La phrase réponse, attendue et soulignée (ou encadrée ou surlignée) répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute sur l'énoncé (erreur d'énoncé ?), n'hésitez pas à le partager avec le professeur-surveillant.

Exercice 1 (Une suite définie par une intégrale)

On définit pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$.

1. Justifier que I_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer I_0 et I_1 .
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq 1$.
4. Étudier la monotonie de la suite (I_n) . En déduire que la suite (I_n) a une limite L .
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la valeur de L .
6. Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n .
7. En déduire la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$, puis un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.
8. En exprimant I_{n+2} en fonction de I_n , trouver la limite de $n(1 - nI_n)$. En déduire un équivalent de $1 - nI_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (Deux suites implicites : parties A et B indépendantes)

Partie A

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction f_n sur $[0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0; +\infty[; \quad f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$$

1. Montrer que f_n est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$ et calculer sa dérivée. En déduire les variations de f_n .

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
3. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution positive. On notera u_n cette solution.
4. Calculer u_0 .
5. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n \in]0; 1[$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $e^{u_{n+1}}$ en fonction de u_{n+1} .
7. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$ et la monotonie de la suite (u_n) .
8. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note L sa limite. Donner un encadrement de L .
9. On suppose que $L > 0$. Calculer alors la limite de $e^{u_n} + nu_n^2 - 3$ quand n tend vers $+\infty$ et obtenir une contradiction. En déduire la valeur de L .
10. Calculer la limite de nu_n^2 quand n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie B

On définit maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction g_n sur $[0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0; +\infty[; \quad g_n(x) = e^x + \frac{1}{n}x^2 - 3,$$

et la fonction φ sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[; \quad \varphi(x) = \frac{3 - e^x}{x^2}.$$

11. Montrer que si $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(x) = 0$ est équivalent à $\varphi(x) = \frac{1}{n}$.
12. Donner des équivalents simples de φ en 0 et en $+\infty$. En déduire les limites de φ en 0 et en $+\infty$.
13. Montrer que φ induit une bijection de $]0; +\infty[$ dans un domaine à déterminer. En déduire l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de $v_n \in]0; +\infty[$ tel que $\varphi(v_n) = \frac{1}{n}$. Résoudre $\varphi(x) = 0$. En déduire la limite de la suite (v_n) .
14. On définit la fonction ψ sur $] -\ln(3); +\infty[$ par :

$$\psi(t) = \frac{3(1 - e^t)}{(\ln(3) + t)^2} \text{ pour tout } t \in] -\ln(3); +\infty[.$$

Montrer que ψ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 et calculer ce développement limité.

15. Montrer que ψ induit une bijection de $] -\ln(3); +\infty[$ sur un domaine à préciser (on remarquera que $\psi(t) = \varphi(\ln(3) + t)$). On note h la bijection réciproque de ψ .
16. Montrer que h admet un DL d'ordre 1 en 0 et calculer ce DL.
17. On note $w_n = v_n - \ln(3)$. Exprimer w_n en fonction de h et n .
18. Montrer qu'il existe a et b tels que $v_n = a + \frac{b}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 3 (Une suite récurrente)

On étudie la suite (u_n) définie par récurrence par $u_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Que vaut u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $u_0 = 0$.

On suppose dans la suite que $u_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$

2. Montrer que (u_n) est bien définie.
3. Montrer que $\sin(x) < x$ pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Étudier la monotonie de (u_n) .
5. En déduire la limite de (u_n) .
6. Montrer $x \mapsto \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right)$ admet un DL en 0 à l'ordre 1 et calculer ce DL.
7. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{3}$.
8. Montrer le résultat suivant :

Si (a_n) est une suite de nombres réels convergeant vers le réel L alors la suite (S_n) définie par $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ converge aussi vers L .

9. Montrer que $\frac{1}{nu_n^2}$ tend vers $\frac{1}{3}$ quand n tend vers $+\infty$.
10. En déduire un équivalent de u_n .

Exercice 4 (deux suites adjacentes)

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{(n+1)2^n}$$

1. Montrer que u_n et v_n sont adjacentes. On notera L leur limite commune.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$.
 - (a) Exprimer u_n en utilisant $f_n(x)$ pour une valeur choisie de x . Calculer également $f_n(0)$.
 - (b) Justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. Simplifier l'écriture de $f'_n(x)$ si $x \in [0; 1[$.
 - (c) Montrer que

$$u_n = \ln(2) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$$

- (d) Calculer la valeur de L .