DS3

Calculatrice non autorisée, durée : 4 heures

Le sujet comporte 2 pages (1 feuille recto-verso). Les 6 exercices sont indépendants.

— Bien lire tout le sujet avant de commencer. Traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.

— Justifier toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et s'assurer que :
  - Vous n'avez pas d'emblée affirmé que la propriété à démontrer est vraie (sans justifier). Posez - vous les bonnes questions : je sais que ? ou je cherche quand ou qui ?
  - Le raisonnement est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire (en maths comme en français).
  - Les liens logiques (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, ..., ?, ?) sont utilisés et utilisés à bon escient.
  - La phrase réponse, attendue et soulignée (ou encadrée ou surlignée) répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute sur l'énoncé (erreur d'énoncé ? ?), n'hésitez pas à le partager avec le professeur-surveillant.

Exercice 1 (Un calcul d'intégrale)

1. Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+2t+3}$; en précisant l'ensemble de définition.
2. Justifier que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos(x)+\sin(x)}dx$ est bien définie.
3. Pour $x \in]-\pi;\pi[$, on pose $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Montrer que $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.
4. En effectuant un changement de variable, calculer I.

Exercice 2 (une EDL1)

1. Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto Arctan(x)$.
2. Résoudre sur l'intervalle $]0;+\infty[$, l'équation différentielle :

$$(E) : xy' + y = \arctan(x)$$

3. Calculer la limite éventuelle d'une solution de (E) sur $]0;+\infty[$ en 0^+.
4. L'équation (E) admet-elle une solution sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 (une étude de fonction)

On définit la fonction f par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right) - \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)$.

1. Donner en justifiant le domaine de définition D_f de f.

2. Montrer qu'il existe un réel a tel que la fonction f est dérivable sur au moins $D_f \setminus \{-a; a\}$. Calculer sa dérivée sur ce domaine. La fonction f est-elle dérivable en a et en $-a$?
3. Donner les variations de f.
4. Donner la relation entre $f(-x)$ et $f(x)$. Qu'en déduit-on sur la courbe représentative de f ?
5. Tracer la courbe de la fonction f.
6. Montrer que f est bijective de D_f sur un domaine J à déterminer.
7. Déterminer l'image de 0 par la bijection réciproque de f et le nombre dérivé en 0 de la bijection réciproque.

Exercice 4 (une suite d'intégrales)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln(x))^n}{x^2} dx$

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $g : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $g(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a; b]$, $M \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b g(x)dx \leqslant M(b - a)$.
2. Justifier l'existence de I_n. Calculer I_0.
3. A l'aide d'un changement de variable, montrer que $I_1 = \displaystyle\int_0^1 te^{-t} dt$. En déduire la valeur de I_1.
4. A l'aide d'une intégration par partie, trouver une expression de I_{n+1} en fonction de I_n. En déduire I_2 et I_3.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in [1; e]$, $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{x^2} \leqslant 1$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant 2$.
7. En s'inspirant de la question 3, montrer que $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite de la suite I_n ?
8. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{n!} I_n = 1 - \dfrac{1}{e} S_n$.
9. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = e$.

Exercice 5 (une EDL2)

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) suivante :
$$(E) : y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$$
On pourra chercher une solution particulière de (E) sous la forme $(a_2x^2 + a_1x + a_0)e^{-x}$.
2. On souhaite maintenant résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0; +\infty[$:
$$(E_2) : xy'' + 2(x + 1)y' + (x + 2)y = 2e^{-x}$$
Résoudre (E_2) sur $]0; +\infty[$, en définissant la fonction z sur $]0; +\infty[$ par $z = xy$.
3. L'équation (E_2) admet-elle une solution sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6 (une relation entre les fonctions arcsin et arctan)

1. Etudier la fonction $u : x \mapsto \dfrac{1 - x}{1 + x}$ (domaine de définition, dérivabilité, variations, limites).
2. Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$ on a : $\cos(2 \arctan(\sqrt{x})) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$.
3. En déduire
$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad \arcsin\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) + 2 \arctan\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$