

DS4 - Correction

Calculatrice non autorisée, durée : 4 heures

Le sujet comporte 3 pages. Les 4 exercices sont indépendants.

- Bien lire tout le sujet avant de commencer. Traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
- Justifier toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et s'assurer que :
 - Vous n'avez pas d'emblée affirmé que la propriété à démontrer est vraie (sans justifier). Posez-vous les bonnes questions : je sais que ? ou je cherche quand ou qui ?
 - Le raisonnement est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire (en maths comme en français).
 - Les liens logiques (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, ...) sont utilisés et utilisés à bon escient.
 - La phrase réponse, attendue et soulignée (ou encadrée ou surlignée) répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute sur l'énoncé (erreur d'énoncé ??), n'hésitez pas à le partager avec le professeur-surveillant.

Exercice 1 (Une suite définie par une intégrale)

On définit pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$.

1. Justifier que I_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto (1-x)^n e^{-2x}$ est continue sur $[0; 1]$ donc l'intégrale est bien définie.

2. Calculer I_0 et I_1 .

On a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pour calculer I_1 on fait une IPP avec $u' = e^{-2x}$, $v = (1-x)$ donc $u = -\frac{1}{2} e^{-2x}$ et $v' = -1$, u et v sont bien de classe

$\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 (1-x)e^{-2x} dx \\
 &= \left[-\frac{1}{2}(1-x)e^{-2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} \right) \times (-1) dx \\
 &= 0 - \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2}
 \end{aligned}$$

$$I_0 = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}; \quad I_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2}$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0; 1]$ on a $0 \leq (1-x)^n e^{-2x} \leq 1$ on en déduit

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \leq \int_0^1 1 dx$$

d'où

$$0 \leq I_n \leq 1$$

4. Étudier la monotonie de la suite (I_n) . En déduire que la suite (I_n) a une limite L .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $x \in [0; 1]$,

$$(1-x)^{n+1} = (1-x) \times (1-x)^n$$

et comme $0 \leq (1-x) \leq 1$

$$(1-x)^{n+1} \leq (1-x)^n$$

Comme $e^{-2x} \leq 1$ pour tout $x \geq 0$ on en déduit que

$$(1-x)^{n+1} e^{-2x} \leq (1-x)^n e^{-2x}$$

pour tout $x \in [0; 1]$. En intégrant cette inégalité sur $[0; 1]$, on obtient

$$I_{n+1} \leq I_n$$

La suite (I_n) est donc décroissante et est minorée par 0, elle admet donc une limite finie.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la valeur de L .

Comme $e^{-2x} \leq 1$ pour tout $x \geq 0$ on a pour tout $x \in [0; 1]$, $(1-x)^n e^{-2x} \leq (1-x)^n$. En intégrant cette inégalité sur $[0; 1]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx &\leq \int_0^1 (1-x)^n dx \\
 I_n &\leq \left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1} \right]_0^1 \\
 I_n &\leq \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et comme $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ on obtient en passant à la limite $L = 0$.

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

6. Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on fait une IPP dans I_{n+1} en posant $u' = e^{-2x}$, $v = (1-x)^{n+1}$ donc $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ et $v' = -(n+1)(1-x)^n$, u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx \\ &= \left[\left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \times (1-x)^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2} e^{-2x} \times (-(n+1)(1-x)^n) dx \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}(n+1) \int_0^1 e^{-2x} (1-x)^n dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(n+1)I_n \end{aligned}$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(n+1)I_n$$

7. En déduire la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$, puis un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

En utilisant le résultat précédent, on obtient :

$$nI_n = 1 - 2I_{n+1} - I_n$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1$$

On en déduit :

$$I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$$

8. En exprimant I_{n+2} en fonction de I_n , trouver la limite de $n(1 - nI_n)$. En déduire un équivalent de $1 - nI_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (Deux suites implicites : parties A et B indépendantes)

Partie A

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction f_n sur $[0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0; +\infty[; \quad f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$$

1. Montrer que f_n est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$ et calculer sa dérivée. En déduire les variations de f_n .

La fonction f_n est composée de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue et dérivable sur $[0; +\infty[$.

On a pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$f'_n(x) = e^x + 2nx$$

On en déduit que $f'_n(x) > 0$ pour tout $x \in [0; +\infty[$, donc f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} nx^2 = +\infty$ on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$$

3. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution positive. On notera u_n cette solution.

On a $f_n(0) = -3$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ et f_n strictement croissante sur $[0; +\infty[$, le théorème des bijections des fonctions continues strictement croissantes assure qu'il existe un unique $x \in [0; +\infty[$ tel que $f_n(x) = 0$.

4. Calculer u_0 .

On a $f_0(x) = e^x - 3$ donc $f_0(x) = 0$ si et seulement si $x = \ln(3)$.

$$u_0 = \ln(3)$$

5. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n \in]0; 1[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(1) = e + n - 3$ donc comme $n \geq 1$, alors $f_n(1) \geq e - 2 > 0$. Comme f_n est strictement croissante et $f_n(u_n) = 0$ on en déduit que $u_n < 1$. On savait déjà que $u_n > 0$ car $f_n(0) = -3 < 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $e^{u_{n+1}}$ en fonction de u_{n+1} .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ donc $e^{u_{n+1}} + (n+1)u_{n+1}^2 - 3 = 0$. On en déduit :

$$e^{u_{n+1}} = -(n+1)u_{n+1}^2 + 3$$

7. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$ et la monotonie de la suite (u_n) .

On a :

$$f_n(u_{n+1}) = e^{u_{n+1}} + nu_{n+1}^2 - 3 = -(n+1)u_{n+1}^2 + 3 + nu_{n+1}^2 - 3 = -u_{n+1}^2 < 0$$

Comme $f_n(u_{n+1}) < 0$ et $f_n(u_n) = 0$ et f_n strictement croissante, on en déduit : $u_{n+1} \leq u_n$.

La suite (u_n) est décroissante.

8. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note L sa limite. Donner un encadrement de L .

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel L . Comme $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on en déduit en passant à la limite que

$$0 \leq L \leq 1$$

9. On suppose que $L > 0$. Calculer alors la limite de $e^{u_n} + nu_n^2 - 3$ quand n tend vers $+\infty$ et obtenir une contradiction. En déduire la valeur de L .

Si $L > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{u_n} + nu_n^2 - 3) = +\infty$ en contradiction avec $e^{u_n} + nu_n^2 - 3 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $L = 0$.

10. Calculer la limite de nu_n^2 quand n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

On a la relation $e^{u_n} + nu_n^2 - 3 = 0$ donc $nu_n^2 = 3 - e^{u_n}$. En passant à la limite dans cette dernière expression on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n^2 = 3 - 1 = 2$$

On en déduit

$$u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Partie B

On définit maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction g_n sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[; \quad g_n(x) = e^x + \frac{1}{n}x^2 - 3,$$

et la fonction φ sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[; \quad \varphi(x) = \frac{3 - e^x}{x^2}.$$

11. Montrer que si $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(x) = 0$ est équivalent à $\varphi(x) = \frac{1}{n}$.

Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $g_n(x) = 0$ si et seulement si $e^x + \frac{1}{n}x^2 - 3 = 0$ c'est-à-dire $\frac{3 - e^x}{x^2} = \frac{1}{n}$.

12. Donner des équivalents simples de φ en 0 et en $+\infty$. En déduire les limites de φ en 0 et en $+\infty$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - e^x) = 2$ on a $(3 - e^x) \sim_0 2$ donc $\varphi(x) \sim_0 \frac{2}{x^2}$. On a également $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $(3 - e^x) \sim_{+\infty} -e^x$, donc $\varphi(x) \sim_{+\infty} -\frac{e^x}{x^2}$. On obtient donc $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = +\infty$ et en utilisant les croissances comparées $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$.

13. Montrer que φ induit une bijection de $]0; +\infty[$ dans un domaine à déterminer. En déduire l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de $v_n \in]0; +\infty[$ tel que $\varphi(v_n) = \frac{1}{n}$. Résoudre $\varphi(x) = 0$. En déduire la limite de la suite (v_n) .

La fonction φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ car composée de fonctions dérivables et pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{-e^x x^2 - (3 - e^x)2x}{x^4} \\ &= \frac{e^x(2 - x) - 6}{x^3} \end{aligned}$$

On définit la fonction $u : x \mapsto e^x(2 - x) - 6$ sur $]0; +\infty[$. La fonction u est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$

$$u'(x) = e^x(1 - x)$$

On en déduit que u est croissante sur $]0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$. Comme $u(1) = e - 6 < 0$ on a $u(x) < 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. Finalement comme $\varphi'(x) = \frac{u(x)}{x^3}$ pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a φ strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. Comme φ est continue sur $]0; +\infty[$, le théorème des bijections des fonctions continues strictement monotones assure que φ induit une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel strictement positif v_n tel que $\varphi(v_n) = \frac{1}{n}$.

On a $\varphi(x) = 0$ si et seulement si $3 - e^x = 0$ c'est-à-dire $x = \ln(3)$, on a donc $\varphi^{-1}(0) = \ln(3)$. Le théorème des bijections réciproques assure que φ^{-1} est continue donc $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi^{-1}(x) = 0$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et comme $v_n \varphi^{-1}(\frac{1}{n})$ la caractérisation séquentielle de la limite montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \varphi^{-1}(0) = \ln(3)$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \varphi^{-1}(0) = \ln(3)$$

14. On définit la fonction ψ sur $] -\ln(3); +\infty[$ par :

$$\psi(t) = \frac{3(1 - e^t)}{(\ln(3) + t)^2} \text{ pour tout } t \in] -\ln(3); +\infty[.$$

Montrer que ψ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 et calculer ce développement limité.

La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0, elle admet donc un DL à l'ordre 1 en 0 et

$$\psi(t) = \psi(0) + \psi'(0)t + o_0(t)$$

Comme $1 - e^t = -t + o_0(t)$ et $\frac{1}{(\ln(3) + t)^2} = \frac{1}{\ln(3)^2} + o_0(1)$, donc

$$\psi(t) = -\frac{3}{\ln(3)^2}t + o_0(t)$$

15. Montrer que ψ induit une bijection de $] -\ln(3); +\infty[$ sur un domaine à préciser (on remarquera que $\psi(t) = \varphi(\ln(3) + t)$). On note h la bijection réciproque de ψ .

On a pour tout $t \in] -\ln(3); +\infty[$, $\psi'(t) = \varphi'(\ln(3) + t) > 0$ donc ψ est strictement croissante et $\lim_{x \rightarrow -\ln(3)} \psi(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = +\infty$, donc ψ induit une bijection de $] -\ln(3); +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

16. Montrer que h admet un DL d'ordre 1 en 0 et calculer ce DL.

On a pour tout $t \in] -\ln(3); +\infty[$, $\psi'(t) > 0$ et ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc h est de classe $\mathcal{C}^1$: elle admet donc un DL au voisinage de 0 : $h(t) = a_0 + a_1t + o_0(t)$. Comme $h(0) = 0$ on a $a_0 = 0$. Pour calculer a_1 on peut utiliser

$a_1 = h'(0) = \frac{1}{\psi'(h(0))} = -\frac{\ln(3)^2}{3}$. On en déduit :

$$h(t) = -\frac{\ln(3)^2}{3}t + o_0(t)$$

17. On note $w_n = v_n - \ln(3)$. Exprimer w_n en fonction de h et n .

On a $\varphi(v_n) = \frac{1}{n}$ donc $\varphi(\ln(3) + w_n) = \frac{1}{n}$, c'est-à-dire $\psi(w_n) = \frac{1}{n}$ donc

$$w_n = h\left(\frac{1}{n}\right)$$

18. Montrer qu'il existe a et b tels que $v_n = a + \frac{b}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ on a

$$w_n = -\frac{\ln(3)^2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$v_n = \ln(3) - \frac{\ln(3)^2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 3 (Une suite récurrente)

On étudie la suite (u_n) définie par récurrence par $u_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Que vaut u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $u_0 = 0$.

On a $\sin(0) = 0$ donc si $u_0 = 0$, on a $u_1 = 0$ et donc (u_n) est constante en 0.

On suppose dans la suite que $u_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$

2. Montrer que (u_n) est bien définie.

On note f la fonction $x \mapsto \sin(x)$. La fonction f vérifie $f\left(\left]0; \frac{\pi}{2}\right]\right) =]0; 1] \subset \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ est stable par f ce qui prouve que (u_n) est bien définie.

3. Montrer que $\sin(x) < x$ pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.

On note h la fonction $h : x \mapsto \sin(x) - x$. La fonction h est continue et dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$h'(x) = \cos(x) - 1 < 0$$

La fonction h est donc strictement décroissante sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et comme $h(0) = 0$ on en déduit $h(x) < 0$ pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Étudier la monotonie de (u_n) .

Comme la fonction f est croissante la suite (u_n) est monotone. La monotonie est donnée par le signe de la fonction h : comme $h < 0$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ on en déduit que (u_n) est décroissante.

5. En déduire la limite de (u_n) .

Comme $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ est stable par f on a pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq \frac{\pi}{2}$ donc (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle admet donc une limite finie L et L est un point fixe de f ou est un bord de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$. Les points fixes de f sont les solutions de $h(x) = 0$ c'est-à-dire $x = 0$. On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

6. Montrer $x \mapsto \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right)$ admet un DL en 0 à l'ordre 1 et calculer ce DL.

Pour $x \neq 0$ on peut écrire :

$$\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{\sin^2(x)} - 1 \right)$$

On sait que $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)$ donc $\sin(x)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o_0(x^4)$. On en déduit :

$$\frac{x^2}{\sin^2(x)} = \frac{x^2}{x^2 - \frac{x^4}{3} + o_0(x^4)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + o_0(x^2)} = 1 + \frac{x^2}{3} + o_0(x^2)$$

et finalement :

$$\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} + o_0(1)$$

7. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \right) = \frac{1}{3}$.

On a

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{\sin^2(u_n)} - \frac{1}{u_n^2}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et d'après le résultat de la question précédente, par caractérisation séquentielle de la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \right) = \frac{1}{3}$$

8. Montrer le résultat suivant :

Si (a_n) est une suite de nombres réels convergeant vers le réel L alors la suite (S_n) définie par $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ converge aussi vers L .

C'est le théorème de Césaro démontré en cours.

9. Montrer que $\frac{1}{nu_n^2}$ tend vers $\frac{1}{3}$ quand n tend vers $+\infty$.

On pose pour $k \in \mathbb{N}^*$ $a_k = \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}$ alors on sait que $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \frac{1}{3}$. La question précédente montre que $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ converge également vers $\frac{1}{3}$. Mais $S_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right)$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{u_0^2} = 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n^2} = \frac{1}{3}$$

10. En déduire un équivalent de u_n .

On en déduit :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Exercice 4 (deux suites adjacentes)

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{(n+1)2^n}$$

1. Montrer que u_n et v_n sont adjacentes. On notera L leur limite commune.

Étudions la monotonie de (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} > 0$$

donc (u_n) est croissante.

Étudions la monotonie de (v_n) :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)2^{n+1}} - \frac{1}{(n+1)2^n} = \frac{(n+2) + (n+1) - 2(n+2)}{(n+1)(n+2)2^{n+1}} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)2^{n+1}} < 0$$

donc (v_n) est décroissante.

Enfin on étudie $v_n - u_n$

$$v_n - u_n = \frac{1}{(n+1)2^n}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

On conclue que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$.

(a) Exprimer u_n en utilisant $f_n(x)$ pour une valeur choisie de x . Calculer également $f_n(0)$.

On a :

$$u_n = f_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

et $f_n(0) = 0$.

(b) Justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. Simplifier l'écriture de $f'_n(x)$ si $x \in [0; 1[$.

La fonction f_n est polynomiale, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n k \frac{x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

si $x \in [0; 1[$, on a également :

$$f'_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

(c) Montrer que

$$u_n = \ln(2) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$$

On a

$$u_n = f_n\left(\frac{1}{2}\right) = f_n\left(\frac{1}{2}\right) - f_n(0) = \int_0^{\frac{1}{2}} f'_n(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-t^n}{1-t} dt$$

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t} dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1-t} dt$$

$$u_n = [-\ln(1-t)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1-t} dt$$

$$u_n = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1-t} dt$$

$$u_n = \ln(2) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1-t} dt$$

(d) Calculer la valeur de L .

On a pour tout $t \in [0; \frac{1}{2}]$, $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq 2t^n$ donc

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 2t^n dt = \frac{2}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1-t} dt = 0$. Finalement, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(2)$$