

# Programme de colle 19

## Chap13 Propriétés de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue (par morceaux).

### I Définitions

1. Définition d'une subdivision, d'une fonction en escalier, de l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment.

Une subdivision de  $[a, b]$  est une famille de réels  $(a_k)_{k=0..n}$  tels que  $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ .

Une fonction en escalier sur  $[a, b]$  est une application  $e$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  telle qu'il existe une subdivision  $(a_k)_{k=0..n}$  de  $[a, b]$  et  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $e|_{]a_k, a_{k+1}[}$  est constante. Si  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\forall x \in ]a_k, a_{k+1}[$ ,  $e|_{]a_k, a_{k+1}[}(x) = \lambda_k$  alors par définition  $\int_{[a,b]} e(x) dx = \int_a^b e(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (a_{k+1} - a_k)$ . Cette définition est indépendante de la subdivision adaptée à  $e$ .

2. Théorème (admis) -définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue et réelle sur ce segment.

Si  $f$  est continue et réelle sur le segment  $[a, b]$  alors

- il existe une suite  $(e_n)$  de fonctions en escalier sur  $[a, b]$  telle que  $\sup_{[a,b]} |f - e_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  (\*\*) et  $\left( \int_a^b e_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $L$
- Si  $(e_n)$  est une autre suite de fonctions en escalier vérifiant (\*\*) alors  $\left( \int_a^b e_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge aussi vers ce même réel  $L$ .
- Par définition,  $\int_a^b f(x) dx = L$

3. Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction complexe

Si  $f$  est continue et complexe sur le segment  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re}(f(x)) dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(x)) dx$ .

4. Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux sur ce segment.

Une fonction continue par morceaux sur le segment  $[a, b]$  est une application  $f$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  telle qu'il existe une subdivision  $(a_k)_{k=0..n}$  de  $[a, b]$  et  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $f_k = f|_{]a_k, a_{k+1}[}$  est continue sur  $]a_k, a_{k+1}[$  et admet une limite finie à droite  $a_k$  en et une limite finie à gauche en  $a_{k+1}$ . Alors par définition  $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \tilde{f}_k(x) dx$ . Cette définition est indépendante de la subdivision adaptée à  $f$ .

5. Définition de l'intégrale entre des bornes non croissantes.

Si  $f$  est continue par morceaux sur le segment  $[a, b]$  alors par définition,  $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$  et  $\int_a^a f(x) dx = 0$ .

**Csq :** Si  $f$  est continue par morceaux sur un intervalle  $I$  alors  $\forall (a, b) \in I^2$ ,  $\int_a^b f(x) dx$  existe.

### II Propriétés déjà rencontrées

1. Relation de Chasles

Si  $f$  est continue (par mcx) sur l'intervalle  $I$  alors  $\forall (a, b, c) \in I^2$ ,  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$

2. Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont continues (par mcx) sur l'intervalle  $I$  alors  $\forall (\alpha, \beta) \in K^2$ ,  $\forall (a, b) \in I^2$ ,  $\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$ .

3. Positivité

Si  $f$  est réelle, continue (par mcx) et positive sur  $[a, b]$ , alors  $\int_a^b f(t) dt \geq 0$ .

4. Croissance

Si  $f$  et  $g$  sont réelles, continues (par mcx) et  $\forall t \in [a, b]$ ,  $f(t) \leq g(t)$  alors  $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ .

### III Inégalité triangulaire

Si  $f$  est continue (par mcx) sur l'intervalle  $I$  alors  $\forall (a, b) \in I^2$ ,  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left| \int_a^b |f(t)| dt \right|$

### IV Primitive

1. Théorème fondamental de l'intégration **TFI** et sa conséquence

**TFI :** Si  $f$  est **continue** sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$  alors  $(x \mapsto \int_a^x f(t) dt)$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  et est l'unique primitive de  $f$  sur  $I$  qui s'annule en  $a$ .

**Csq :** Si  $f$  est **continue** sur un intervalle  $I$  alors  $f$  admet une primitive sur  $I$ .

2. Théorème fondamental de calcul d'une intégrale **TFCI**

Si  $f$  est **continue** sur l'intervalle  $I$  alors pour toute primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$ ,  $\forall (a, b) \in I^2$ ,  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \stackrel{\text{notation}}{=} [F(t)]_a^b$ .

3. Lien entre  $f$  et  $f'$

Si  $f$  est de **classe  $C^1$**  sur l'intervalle  $I$  et  $a \in I$  alors  $\forall x \in I$ ,  $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$ .

4. Théorème d'intégration par parties

Si  $f$  et  $g$  sont de **classe  $C^1$**  sur l'intervalle  $I$  alors  $\forall (a, b) \in I^2$ ,  $\int_a^b f'(t) g(t) dt = [f(t) g(t)]_a^b - \int_a^b f(t) g'(t) dt$ .

5. Théorème de changement de variable

Si  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $I$  et  $f$  est continue sur  $\varphi(I)$  alors  $\forall (a, b) \in I^2$ ,  $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ .

### V Lemme d'annulation

1. Lemme d'annulation

Si  $f$  est **réelle, continue et positive** sur l'intervalle  $[a, b]$  et  $\int_a^b f(t) dt = 0$  alors  $\forall x \in [a, b]$ ,  $f(x) = 0$ .

2. Sa contraposée

Si  $f$  est **continue, réelle et positive** sur l'intervalle  $[a, b]$  et  $\exists x \in [a, b]$ ,  $f(x) \neq 0$  alors  $\int_a^b f(t) dt > 0$ .

### VI Moyenne d'une fonction continue sur un segment

1. Définition

Lorsque  $f$  est continue (par mcx) sur  $[a, b]$ , la moyenne de  $f$  entre  $a$  et  $b$  est  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \left( = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right)$ .

## 2. Inégalités de la moyenne

Si  $f$  est **continue et réelle** sur  $[a, b]$ , alors  $\min_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \max_{[a,b]} f$ .

Si  $f$  est continue (par mcx) sur l'intervalle  $I$  et bornée sur  $I$  alors  $\forall (a, b) \in I^2, \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq [\sup_I |f|] |b - a|$ .

## 3. Egalité de la moyenne

Si  $f$  est **continue et réelle** sur  $[a, b]$  alors  $\exists c \in [a, b], f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ .

## VII Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si  $f$  et  $g$  sont **continues et réelles** sur  $[a, b]$ , alors  $\left( \int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(t)^2 dt \right) \left( \int_a^b g(t)^2 dt \right)$ .

## VIII Sommes de Riemann

Si  $f$  est **continue** sur  $[a, b]$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$ . **Cas particulier** : Si  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$ .

**QUESTIONS DE COURS : Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus.**

**Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaître :**

**Q1** : Théorème fondamental de l'intégration

**Q2** : Lemme d'annulation

**Q3** : Inégalité de Cauchy-Schwarz