

Un polynôme P à coefficient dans K est une suite (a_n) d'éléments de K dont tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang i.e. $\exists N \in \mathbb{N} / \forall k > N, a_k = 0$.
On note $P = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_N, 0, 0, 0, \dots)$.
appelés les coefficients de P et sont uniques car les termes d'une suite sont uniques.
 $K[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans K . **1**

Soit $P = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_p, 0, 0, \dots) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
et $Q = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_q, 0, 0, \dots) = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$
tel que el que $\forall n > p, a_n = 0$ et $\forall n > q, b_n = 0$.
Soit $\alpha \in K$. On définit
 $P + Q = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m, 0, 0, \dots)$
où $m = \max(p, q)$.
 $\lambda P = (\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_p, 0, 0, \dots)$
 $P \times Q = (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad tQ \quad \forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$.
 $P^0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P^{n+1} = P^n \times P$ **2**

A tout polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de $K[X]$, on associe la fonction polynomiale $\tilde{P}$ définie par : $\forall t \in K, \tilde{P}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n = \sum_{k=0}^n a_k t^k$.
 $\tilde{P}$ est la fonction polynomiale de K dans K associée à P . **11**

Soit A et B deux éléments de $K[X]$. Le polynôme A divise le polynôme B dans $K[X]$ lorsque : $\exists Q \in K[X] / A = BQ$ **12**

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $n \geq 1$. Le polynôme dérivé de P est :
 $P^{(1)} = P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) a_{l+1} X^l$.
On définit alors les polynômes dérivés successifs :
 $P^{(0)} = P$ est le polynôme dérivé 0^{ème} de P et
 $\forall j \in \mathbb{N}^*, P^{(j)} = (P^{(j-1)})'$ est le polynôme dérivé j ^{ème} de P . **13**

Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$ et $m \in \mathbb{N}$
1) α est une racine de P (dans K) lorsque $\tilde{P}(\alpha) = 0$.
2) α est une racine de P (dans K) d'ordre de multiplicité m lorsque $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$ et $\tilde{Q}(\alpha) \neq 0$.
 α est une racine de P (dans K) d'ordre de multiplicité au moins m lorsque $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$. **18**

Généralisation : Soit $P \in K[X]$, $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ des scalaires distincts et $m_1, \dots, m_s$ des entiers naturels.
1) $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sont racines de P d'ordre de multiplicités respectives **exactement** $m_1, \dots, m_s$ **si et ssi** il existe un polynôme Q de $K[X]$ tel que : $P = (X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_s)^{m_s} Q(X)$ et $\forall k \in \{1, \dots, s\}, \tilde{Q}(\alpha_k) \neq 0$.
2) $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sont racines de P d'ordre de multiplicités respectives **au moins** $m_1, \dots, m_s$ **si et ssi** il existe un polynôme Q de $K[X]$ tel que : $P = (X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_s)^{m_s} Q(X)$. **19**

On note $0 = (0, 0, 0, 0, \dots)$ la suite nulle et $1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$
Et $X = (0, 1, 0, 0, \dots)$.
On montre par récurrence et avec la définition du produit que :
 $\forall k \in \mathbb{N}, X^k = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$. **3**

Alors, en utilisant la définition de somme, produit et multiplication par un scalaire,
 $P = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_N, 0, 0, 0, \dots)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des X^k telle que :
 $P = \sum_{k=0}^N \underbrace{a_k}_{\text{coeff uniques}} X^k$.
Un polynôme constant égal au scalaire λ est un polynôme de la forme $\lambda + 0.X + 0.X^2 + \dots + 0.X^N$. Cas particuliers : $0 = \sum_{k=0}^N 0.X^k$ et $1 = 1 + 0.X + 0.X^2 + \dots + 0.X^N$. **4**

Soit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$ et λ et $\mu \in K$. Alors,
 $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k$ et $\lambda P = \sum_{k=0}^p \lambda a_k X^k$
 $P \times Q = PQ = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$
 $tq \quad c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^k a_{k-i} b_i = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k \\ i+j=k}} a_i b_j$ **5**
 $\mu P + \lambda Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (\mu a_k + \lambda b_k) X^k$ c'est de P et Q .
 $P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^p a_k Q^k$. On peut écrire $P = P(X)$.

Intégrité du produit polynomial : Soit P et Q des éléments $K[X]$. **démo**
 $PQ = 0$ **sietssi** $P = 0$ ou $Q = 0$ **9**

Théo de la division euclidienne **démo**
Si A et B sont deux éléments de $K[X]$ tels que $B \neq 0$, alors il existe deux uniques éléments de $K[X]$, Q et R tels que :
 $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$; Q est le quotient et R est le reste de la division euclidienne de A par B .
Application : B divise A **sietssi** $R = 0$
Cas particulier : si $\deg(A) < \deg(B)$ alors $A = 0 \times B + A$ est la division euclidienne de A par B . **10**

$\forall (k, j) \in \mathbb{N}^2, (X^k)^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > k \\ \frac{k!}{(k-j)!} X^{k-j} & \text{si } j \leq k \end{cases}$ **à savoir retrouver**
Soit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$. $\forall j \in \mathbb{N}, P^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > p \\ \sum_{k=j}^p a_k \frac{k!}{(k-j)!} X^{k-j} & \text{si } j \leq p \end{cases}$ **15**

Caractérisation d'une racine et de sa multiplicité **démo**
Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$ et $m \in \mathbb{N}$
1) α est racine de P **sietssi** $X - \alpha$ divise P .
2) α est une racine de P d'ordre de multiplicité **(exactement)** m **sietssi** pour tout $k \in \{0, \dots, m-1\}, \tilde{P}^{(k)}(\alpha) = 0$ et $\tilde{P}^{(m)}(\alpha) \neq 0$
3) α est une racine de P d'ordre de multiplicité **au moins** m **sietssi** pour tout $k \in \{0, \dots, m-1\}, \tilde{P}^{(k)}(\alpha) = 0$. **20**

Le polynôme nul est le seul polynôme qui a un nombre de racines (comptées ou non avec leur multiplicité) strictement supérieur à son degré **démo** **21**

Soit $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$.
• **Si $P = 0$** (i.e. tous les a_k sont nuls) alors par **convention**, le degré de P est $-\infty$. on note $\deg(0) = -\infty$.
• **Si $P \neq 0$** (i.e. au moins l'un des a_k est non nul) ;
le **degré de $P = \deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N} / a_k \neq 0\}$** ; $\deg(P)$ est l'entier qui vérifie : $a_{\deg(P)} \neq 0$ et $\forall k > \deg(P), a_k = 0$. Le coefficient dominant de P est alors $a_{\deg(P)}$. On note $\text{codom}(P) = a_{\deg(P)}$.
Alors, $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k + \sum_{k=0}^n a_k X^k$ où $n \geq \deg(P)$.
par définition, du degré d'un polynôme **quitte à ajouter des termes nuls**
 $K_n[X]$, $tq \quad n \in \mathbb{N}$, est l'ensemble des polynômes de $K[X]$ de degré inférieur à n . $K_0[X]$ est l'ensemble des polynômes constants.
 $K_n[X] \subset K_{n+1}[X] \subset \dots$ Et si $n \geq \deg(P)$ alors $P \in K_n[X]$. **7**

Soit P, Q et R trois éléments de $K[X]$, α, μ et γ des scalaires, N et j des entiers naturels. Alors,
1. $\sum_{k=0}^N (a_k + b_k) X^k = \sum_{k=0}^N a_k X^k + \sum_{k=0}^N b_k X^k$
2. $(P + Q) + R = P + (Q + R)$ et $P + Q = Q + P$
3. $P + 0 = P$, $P + (-1)P = 0$ et $1P = P$
4. $\gamma(P + Q) = \gamma P + \gamma Q$ et $(\gamma + \mu)P = \gamma P + \mu P$
5. $(\mu P)R = \mu(PR) = \gamma(\mu P)R = \gamma(\mu PR)$
6. $(PQ)R = P(QR) \equiv PQR$ et $PQ = QP$
7. $(P + Q)R = PR + QR$ et $R(P + Q) = RP + RQ$
8. $\gamma(PQ) = P(\gamma Q) = (\gamma P)Q \equiv \gamma PQ$
9. $(P + Q)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} P^k Q^{N-k}$ **Binôme** **6**
10. $\tilde{P}^{(j)} = \tilde{P}^{(j)}$
11. $(\mu P + \gamma Q)^{(j)} = \mu P^{(j)} + \gamma Q^{(j)}$
12. $(PQ)^{(j)} = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} P^{(i)} Q^{(j-i)}$ (Leibniz)
13. $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$
14. $(P \circ (X + \alpha))^{(j)} = P^{(j)}(X + \alpha)$
15. $(\prod_{i=1}^m P_i)^{(j)} = \sum_{i=1}^m P_i' \left(\prod_{j \neq i} P_j \right)$ **14**

Soit $P, P_1, \dots, P_N$ et $Q \in K[X]$ et $\beta \in K$ et $j \in \mathbb{N}$.

1) $\deg(\beta P) = \begin{cases} \deg(P) & \text{si } \beta \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \beta = 0 \end{cases} \leq \deg(P)$
et si P et β non nuls alors $\text{codom}(\beta P) = \beta \text{codom}(P)$.
2) $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
et si P et Q non nuls alors $\text{codom}(PQ) = \text{codom}(P) \text{codom}(Q)$.
2bis) $\deg(\prod_{s=1}^N P_s) = \sum_{s=1}^N \deg(P_s)$
3) $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
Et, Si $\deg(P) < \deg(Q)$ alors $\deg(P + Q) = \deg(Q)$ et $\text{codom}(P + Q) = \text{codom}(Q)$.
Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\text{codom}(P) + \text{codom}(Q) \neq 0$ alors $\deg(P + Q) = \deg(P) = \deg(Q)$ et $\text{codom}(P + Q) = \text{codom}(P) + \text{codom}(Q)$.
Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\text{codom}(P) + \text{codom}(Q) = 0$ alors $\deg(P + Q) < \deg(P) = \deg(Q)$.
3bis) $\deg(\sum_{s=1}^N \beta_s P_s) \leq \max(\deg(P_1), \dots, \deg(P_N))$
4) $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$ si Q non constant **8**
5) $\deg(P^{(j)}) = \begin{cases} \deg(P) - j & \text{si } j \leq \deg(P) \\ -\infty & \text{si } j > \deg(P) \end{cases}$ **16**
Et si $j \leq \deg(P)$ alors $\text{codom}(P^{(j)}) = \frac{\deg(P)!}{(\deg(P)-j)!} \text{codom}(P)$

Théo de formule de Taylor **démo**
Soit $\alpha \in K$. Alors tout polynôme P de $K_n[X]$ s'écrit est d'unique manière comme combinaison linéaire des polynômes $1, X - \alpha, (X - \alpha)^2, \dots, (X - \alpha)^n$ et cette écriture est $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$.
Cas particulier : $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$.
 $\frac{P(0)}{0!}, \frac{P'(0)}{1!}, \dots, \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$ sont les coefficients de P . **17**