POLYNÔMES À UNE INDÉTERMINÉE

Dans tout le chapitre, n , p , q , m , r et s désignent des entiers naturels et r et s non nuls .
K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de K sont appelés des scalaires.

Introduction : RAPPELS A LIRE EN AUTONOMIE …

- Soit f une fonction polynomiale réelle telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_p t^p$

où p entier naturel et $a_0,..,a_p$ réels appelés coefficients de f (a_k étant le coefficient de rang k). Alors,
ou bien tous les a_k sont nuls et f est la fonction nulle et a pour degré $-\infty$.
ou bien l'un des a_k est non nul et le degré de f noté $deg(f)$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.
Deux fonctions polynomiales sont égales lorsqu'elles ont les mêmes coefficients.
Une racine réelle (resp. complexe) de f est un réel (resp complexe) α tel que $f(\alpha) = 0$.

- Soit f et g deux fonctions polynomiales telles que :

$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_p t^p = \sum_{k=0}^{p} a_k t^k$ et $g(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_q t^q = \sum_{k=0}^{q} b_k t^k$ où p et q entiers naturels et
$a_0,..,a_p,b_0,..,b_q$ réels avec $a_p et\ b_q$ non nuls. Donc deg $(f) = p\ et$ deg $(g) = q$.
Quitte à ajouter des termes nuls dans l'expression de f ou celle de g, on peut écrire :
$f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$ et $g(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m = \sum_{k=0}^{m} b_k t^k$ où $m = max(p, q)$.
Alors,

$(f+g)(t) = f(t) + g(t) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)t + \ldots + (a_m + b_m)t^m = \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k)t^k$

$(f \times g)(t) = f(t) \times g(t) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + (a_0 b_2 + a_2 b_2 + a_0 b_2)t^2 \ldots + (a_p b_q)t^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} c_k t^k$

$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$. De plus, $deg(f+g) \leq m = \max(p, q)$car je ne sais pas si $a_m + b_m = 0$ et $\deg(fg) = p + q\ car\ a_p b_q \neq 0$.

On va définir un ensemble plus abstrait et plus large que l'ensemble des fonctions polynomiales vérifiant quasiment les mêmes propriétés qui va nous permettre de travailler avec des polynômes de matrices, d'endomorphismes…
Pour cela, on va définir un polynôme par la suite de ses coefficients.

I Généralités

1. Définitions et opérations

1 Def : Un polynôme à coefficients dans K est une suite d'éléments de K nulle à partir d'un certain rang (dite presque nulle), c'est donc un objet de la forme $P = (a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n, 0, 0, \ldots\ldots)$ où $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ sont des éléments de K et sont appelés les coefficients de P.

2NB : D'après l'égalité de deux suites, deux polynômes sont égaux sietssi ils ont les mêmes coefficients.

On définit trois opérations sur les polynômes à coefficients dans K : une addition entre polynômes, une multiplication d'un polynôme par un scalaire et une multiplication entre polynômes.

3 Def : Soit P et Q deux polynômes à coefficients dans K . Soit $\alpha \in K$.
On pose $P = (a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_p, 0, 0, \ldots\ldots) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ tel\ que\ \forall n > p, a_n = 0$
et $Q = (b_0, b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots, b_q, 0, 0, \ldots\ldots) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\ tel\ que\ \forall n > q, b_n = 0.$
$P + Q = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots\ldots\ldots, a_m + b_m, 0, 0, \ldots\ldots)$ où $m = \max(p, q)$.
$\lambda P = (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \ldots\ldots\ldots, \lambda a_p, 0, 0, \ldots\ldots) = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$P \times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}\ tel\ que\ \forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$.
Prop : $P + Q, \lambda P\ et\ P \times Q$ ainsi définis sont des polynômes à coefficients dans K.

Démo3 : $P + Q$, PQ et λP sont des suites d'éléments de K. Il est clair que $P + Q$ et λP sont des suites presque nulles. Vérifions que $P \times Q$ est une suite presque nulle : Soit $n > p + q$. Alors $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \underbrace{=}_{car\ \forall k > p,\ a_k = 0} \sum_{k=0}^{p} a_k b_{n-k} \underbrace{=}_{\substack{car\ \forall k \leq p,\ n-k \geq n-p > q \\ donc\ b_{n-k} = 0}} 0.$

OK !

4 Def : Soit P un polynôme à coefficients dans K. Par convention, $P^0 = (1, 0, 0, \ldots.)$ et $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ P^m = P^{m-1} \times P$.

2. Nouvelle écriture d'un polynôme-Indéterminée.

5 Déf.: On note X la suite presque nulle $X = (0,1,0,0, \dots)$. X est appelée l'indéterminée.
X n'est pas un scalaire, c'est un polynôme i.e. une suite presque nulle. On ne doit pas écrire "$X = 2$ " ($HORREUR$!).

6 Théo.: $\forall k \in \mathbb{N}, X^k$ est la suite presque nulle : $X^k = \left(\underbrace{0}_{u_0}, 0, \dots\dots, 0, \underbrace{1}_{u_k}, 0,0, \dots\right) = (u_n)$ tq $u_n = \begin{cases} 0 \; si \; n \neq k \\ 1 \; si \; n = k \end{cases}$.

Démo 5 par récurrence sur k. Notons $\mathscr{H}_k$ la propriété : $X^k = \left(\underbrace{0}_{u_0}, 0, \dots\dots, 0, \underbrace{1}_{u_k}, 0,0, \dots \dots\right)$.

Init : par définition de P^0, $X^0 = (1,0,0, \dots\dots)$. Donc, $\mathscr{H}_0$ est vraie.

Propag : Soit k un entier naturel. Je suppose que $\mathscr{H}_k$ est vraie et sous cette hypothèse, je vais prouver que $\mathscr{H}_{k+1}$ est vraie.

On sait que : $X^k = \left(\underbrace{0}_{u_0}, 0, \dots\dots, 0, \underbrace{1}_{u_k}, 0,0, \dots \dots\right) = (u_n)$ tq $\forall n \neq k, u_n = 0 \; et \; u_k = 1$ et $X = \left(\underbrace{0}_{v_0}, \underbrace{1}_{v_1}, \dots\dots, 0,0,0, \dots \dots\right) = (v_n)$ tq que: $\forall n \neq 1, v_n = 0 \; et \; u_1 = 1$. Posons $X^{k+1} = X^k X = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors $c_n = \sum_{l=0}^{n} u_l v_{n-l}$.

Donc, $Si \; n < k$ alors $c_n = \sum_{l=0}^{n} u_l v_{k-l} \underbrace{=}_{car \; u_l = 0 \; si \; l < k} 0$.

Si $n \geq k$ alors $c_n = \sum_{l=0}^{n} u_l v_{n-l} \underbrace{=}_{car \; u_l = 0 \; si \; l \neq k} u_k v_{n-k} = v_{n-k} \underbrace{=}_{car \; v_l = 0 \; si \; l \neq 1} \begin{cases} 0 \;\; si \; n-k \neq 1 \\ 1 \; si \;\; n = k+1 \end{cases}$.

Ainsi, $X^{k+1} = \left(\underbrace{0}_{c_0}, 0, \dots\dots, 0,0, \underbrace{1}_{c_{k+1}}, 0,0, \dots \dots\right)$.. OK.

CCL : le théorème de récurrence assure que $\forall k$, $\mathscr{H}_k$ est vraie. OK !

Alors d'après les opérations sur les polynômes, on a : $\forall (a_1, a_2, \dots\dots\dots, a_n) \in K^{n+1}$,
$a_0X^0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n = (a_0, 0,0, \dots\dots\dots) + (0, a_1, 0, \dots\dots\dots) + (0,0, a_2, 0, \dots\dots\dots) + \cdots + (0,0, \dots\dots 0, a_n, 0,0, \dots\dots) = (a_0, a_1, a_2, \dots\dots\dots, a_n, 0,0, \dots\dots)$ = la suite nulle à partir du rang $n+1$ dont les premiers termes sont a_0,.., a_n.On peut donc dire que :

7 Nouvelle écriture d'un polynôme :
Tout polynôme à coefficients dans K s'écrit de manière unique (**) sous la forme :

$$P = a_0X^0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k \text{ (forme développée de } P\text{).}$$

où $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots\dots, a_n$ sont des éléments de K, appelés coefficients de P et X est l'indéterminée.
P est aussi noté $P(X)$.
On note $K[X]$ l'ensemble des polynômes (à une indéterminée et) à coefficients dans K.
(**) d'après l'égalité de deux polynômes.

8 Polynômes particuliers :

- On note $0 = 0X^0 + 0X + 0X^2 + \cdots + 0X^{n-1} + 0X^n$ le polynôme nul. Le polynôme nul est le seul polynôme dont tous les coefficients sont tous nuls.

Tout polynôme non nul peut s'écrire sous la forme $P = \sum_{k=0}^{p} a_kX^k \;\; tq \; a_p \neq 0$.

- Tout polynôme βX^0 (où $\beta \in K$)est noté $\beta \; et$ appelé polynôme constant. De même, $a_0X^0 \overset{noté}{\hat{=}} a_0$.
- Pour tout $\lambda \in K^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda X^k = 0 + 0X + 0X^2 + \cdots + 0X^{k-1} + \alpha X^k + 0X^{k+1}$ est un monôme (polynôme avec un seul coefficient non nul).

9 Déf: A tout polynôme $P = a_0X^0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$, on associe la fonction polynomiale $\tilde{P}$ définie par : $\forall t \in K$, $\tilde{P}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + a_nt^n = \sum_{k=0}^{n} a_kt^k$.
$\tilde{P}$ est une fonction de K dans K.

10 Attention : P et $\tilde{P}$ sont deux objets de natures mathématiques distinctes : $P \neq \tilde{P}$.

11 notation : On note souvent E l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Propriétés de l'addition et la multiplication polynomiales et de la multiplication (externe) par un scalaire- Composition.

12 Nouvelles écritures de $P+Q, PQ$ et λP - Combinaison linéaire.

Soit $P=\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux éléments de $K[X]$ et λ un élément de K . Alors,

$P+Q=\sum_{k=0}^{\max(p,q)}(a_k+b_k)X^k$

$\lambda P=\sum_{k=0}^{p}\lambda a_k X^k$

$P\times Q=PQ=\sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k \quad tel\ que\ c_k=\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}=\sum_{l=0}^{k} a_{k-l}b_l=\underbrace{\sum_{0\le i,j\le k\ ;\ i+j=k} a_i b_j}_{somme\ double}$

Pour tous scalaires α et β, $\alpha P+\beta Q=\sum_{k=0}^{\max(p,q)}(\alpha a_k+\beta b_k)X^k$ est appelé une combinaison linéaire de P et Q et est un élément de $K[X]$.

13 Règles de calcul

Soit P , Q et R trois éléments de $K[X]$, μ et γ deux scalaires. Alors,

1. $(P+Q)+R=P+(Q+R)\overset{noté}{\triangleq} P+Q+R$
2. $P+Q=Q+P$
3. $P+0=P=0+P$
4. $P+(-1)P=0$
5. $\gamma(P+Q)=\gamma P+\gamma Q$
6. $(\gamma+\mu)P=\gamma P+\mu P$
7. $1P=P$
8. $(\mu\gamma)P=\mu(\gamma P)=\gamma(\mu P)\equiv\gamma\mu P$
9. $(PQ)R=P(QR)\equiv PQR$
10. $PQ=QP$
11. $(P+Q)R=PR+QR$ et $R(P+Q)=RP+RQ$
12. $\gamma(PQ)=P(\gamma Q)=(\gamma P)Q\equiv\gamma PQ$
13. $PQ=0\Leftrightarrow P=0\ ou\ Q=0$ (produit polynomiale **intègre**)
14. $\forall(k,l)\in\mathbb{N}^2, X^kX^l=X^{k+l}$.

Démo : Posons $P=(a_n)$, $Q=(b_n)$, $et\ R=(c_n)$,

9) Montrons que $(PQ)R=P(QR)$ ie. que ces deux polynômes ont les mêmes coefficients.

Posons $PQ=(\theta_n)$, $(PQ)R=(\mu_n)$, $et\ QR=(u_n)$ et $P(QR)=(v_n)$. Soit $n\in\mathbb{N}$.

D'une part, $\theta_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et $\mu_n=\sum_{k=0}^{n}\theta_k c_{n-k}$.Donc, $\mu_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right)c_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\,c_{n-k}$

$\mu_n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} a_i b_{k-i}\,c_{n-k}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-i} a_i b_l\,c_{n-l-i}$.

D'autre part, $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}$ et $v_n=\sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k}$.Donc,$v_n=\sum_{k=0}^{n} a_k\sum_{j=0}^{n-k} b_j c_{n-k-j}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k} a_k b_j c_{n-k-j}$.

Donc, $\mu_n=v_n$. Ainsi $(PQ)R=P(QR)$ puisqu' ils ont les mêmes coefficients.

13) Montrons que : $PQ=0$ sietssi $P=0\ ou\ Q=0$.

D'après la définition du produit de deux polynômes, si $P=0\ ou\ Q=0$ alors $PQ=0$.

Montrons la réciproque par contraposée. Montrons que si P et Q sont non nuls alors PQ est non nul.

Supposons donc que P et Q sont non nuls. Alors on peut écrire $P=\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ avec $a_p\neq 0$ et $b_q\neq 0$.

Donc, $PQ=\sum_{k=0}^{p+q}\theta_k X^k$ vérifie : $\theta_{p+q}=\sum_{l=0}^{p+q}\underbrace{a_l}_{\substack{nul\\ si\ l>p}}\ \underbrace{b_{p+q-l}}_{\substack{nul\\ si\ l<p}}=a_p b_q\neq 0$. Donc PQ non nul.

14) Soit $(k,l)\in\mathbb{N}^2$. Si $k=0$ alors $X^0X^l=1X^l=X^l$ (d'après 7).

Si $k>0$ alors $X^kX^l=(X^{k-1}X)X^l=X^{k-1}(XX^l)=X^{k-1}X^{l+1}\underbrace{=}_{\substack{si\ k>1, alors\\ X^{k-1}=X^{k-2}X}}\ldots=X^{l+k}$.

14 NB: ce sont quasiment les mêmes règles de calcul que dans K sauf que l'inverse d'un polynôme n'existe pas dans $K[X]$ donc on n' écrit pas $\frac{P}{Q}$. Par contre, on pourra utiliser le théorème de division euclidienne.

15 Généralisation : Soit $P_1, P_2, \ldots, P_m$ des éléments de $K[X]$ et $\beta_1,..,\beta_m$ des éléments de K .

$\prod_{k=1}^{m} P_k$ est le produit des polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_m$.

$\sum_{k=1}^{m}\beta_k P_k$ est une combinaison linéaire des polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_m$.

16 Prop : Formule du binôme de Newton et formule de factorisation
pour tous polynômes P et Q et tout entier naturel m ,
$(P+Q)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} P^j Q^{m-j}$ et si m non nul, $P^m - Q^m = (P-Q)\left(\sum_{j=0}^{m-1} P^j Q^{m-1-j}\right)$.

17 Déf : Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et Q deux éléments de $K[X]$. Alors, $P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^k$ est un élément de $K[X]$ appelé composée de Q par P. En particulier, $X^p \circ X^k = (X^k)^p = X^{kp}$.

18 Attention : ne pas confondre $P(Q)$ et PQ .

19 Exemple : $P = X^9 + 4X^3 - 5 = T(X^3) = T \circ Q$ avec $T = X^3 + 4X - 5$ et $Q = X^3$.

20 Polynômes pairs ou impairs
$Si\ P(X) = P(-X)$ (on dit que P est pair)alors $P = \sum_{k=0}^{p} a_{2k} X^{2k} = T(X^2) = T \circ X^2\ tq\ T = \sum_{k=0}^{p} a_{2k} X^k$.
$Si\ P(X) = -P(-X)$ (on dit que P est impair) alors $P = \sum_{k=0}^{p} a_{2k+1} X^{2k+1}$ $P = X \times T(X^2) = X \times (T \circ X^2)\ tq\ T = \sum_{k=0}^{p} a_{2k+1} X^k$.

Démo : Considérons un polynôme P tel que $P(X) = P(-X)$. Alors P s'écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
Par conséquent, $P(-X) = \sum_{k=0}^{n} a_k (-X)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k X^k$. Comme $P(X) = P(-X)$, on a $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k X^k$.
Alors par unicité des coefficients de P, $\forall k \in [\![0,p]\!], a_k(-1)^k = a_k$. Par conséquent, $\forall k \in [\![0,p]\!]$ tq k impair, $-a_k = a_k$ donc $a_k = 0$.
Ainsi, $P(X) = \sum_{\substack{k\ pair \\ 0 \le k \le n}} a_k X^k \underbrace{=}_{p=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{p} a_{2j} X^{2j} = \sum_{j=0}^{p} a_{2j} (X^2)^j = T(X^2)$ avec $T = \sum_{j=0}^{p} a_{2j} X^j$. OK !

4. Degré

21 Déf : Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$.
•Si $P = 0$ $(i.e.$ tous les a_k sont nuls) alors par **convention**, le degré de P est $-\infty$. on note $\deg(P) = -\infty$.
•Si $P \neq 0$ $(i.e.$ au moins l'un des a_k est non nul) alors par **définition**, le degré de P est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. Autrement dit, $deg(P)$ est l'entier qui vérifie : $a_{\deg(P)} \neq 0$ et $\forall k > \deg(P), a_k = 0$.
Alors, $P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k\ avec\ n \ge \deg(P)$. .
$a_{\deg(P)}$ est appelé le coefficient dominant de P.
$a_{\deg(P)} X^{\deg(P)}$ est appelé le terme dominant de P.
Le polynôme nul n'a pas de coefficient dominant, ni de terme dominant.

22 Remarque : Dans la suite du cours, on notera $codom(P)$ le coefficient dominant de P. Cette notation n'est pas officielle mais pratique ! Si vous souhaitez l'utiliser en devoir, vous devez donc la définir.

23 Exemple : Soit $P_n = \frac{1}{2i}[(X-i)^n - (X+i)^n]$. Déterminons son degré et son coefficient dominant et vérifions que P_n est à coefficients réels.
$P_n \underbrace{=}_{FBN} \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-i)^k X^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (i)^k X^{n-k}\right] = \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((-i)^k - i^k) X^{n-k}\right] = \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((-1)^k - 1) i^k X^{n-k}\right]$
$P_n = \frac{1}{2i}\left[\sum_{\substack{k=0 \\ kimpair}}^{n} \binom{n}{k} (-2) i^k X^{n-k}\right] = \frac{-1}{i}\left[\sum_{1 \le 2p+1 \le n} \binom{n}{2p+1} i^{2p+1} X^{n-2p-1}\right] = \frac{-1}{i}\left[\sum_{1 \le 2p+1 \le n} \binom{n}{2p+1} (-1)^p i X^{n-2p-1}\right]$
$P_n = \left[\sum_{1 \le 2p+1 \le n} \binom{n}{2p+1} (-1)^{p+1} X^{n-2p-1}\right]$.
J'en déduis que P_n est à coefficients réels (et même entiers) et $deg\ P_n = n-1\ et\ codom(P_n) = -n$.

24 Théo : Soit P et Q deux éléments de $K[X]$ et β un scalaire.
1) $\mathbf{deg(\beta P)} = \begin{cases} \mathbf{deg(P)}\ \boldsymbol{si\ \beta \neq 0} \\ \mathbf{-\infty}\ \boldsymbol{si\ \beta = 0} \end{cases}$ et si $P\ et\ \beta$ non nuls alors $codom(\beta P) = \beta codom(P)$.
2) $\mathbf{deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)}$ et si P et Q non nuls alors $codom(PQ) = codom(P)codom(Q)$.
3) $\mathbf{deg(P+Q) \le max(deg(P), deg(Q))}$.
De plus,
Si $\deg(P) < \deg(Q)$ alors $\deg(P+Q) = \deg(Q)\ \ et\ codom(P+Q) = codom(Q)$.
Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $codom(P) + codom(Q) \neq 0$ alors $\deg(P+Q) = \deg(Q) = \deg(P)$ et $codom(P+Q) = codom(P) + codom(Q)$.
Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $codom(P) + codom(Q) = 0$ alors $\deg(P+Q) < \deg(P) = \deg(Q)$.

Démo : Les résultats sont évidents si P ou Q est nul.
Soit P et Q deux polynômes non nuls. Alors on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ avec $p = \deg(P)$, $q = \deg(Q)\ et\ a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.
1) Soit $\beta \in \mathbb{R}^*$. Alors $\beta P = \sum_{k=0}^{p} \beta a_k X^k$ et $\beta a_p \neq 0$. Donc, $p = \deg(\beta P)$ et $codom(\beta P) = \beta a_p = \beta codom(P)$.

2) $PQ = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ vérifie : $c_{p+q} = \sum_{l=0}^{p+q} \underbrace{a_l}_{\substack{nul \\ si\ l>p}} \underbrace{b_{p+q-l}}_{\substack{nul \\ si\ l<p}} = a_p b_q \neq 0$. Donc, $\deg(P+Q) = p+q = \deg(P) + \deg(Q)$ *et* et $codom(PQ) = a_p b_q = codom(P)codom(Q)$.

3) $P+Q = \sum_{k=0}^{max(p,q)} (a_k + b_k)X^k$. Si $a_{\max(p,q)} + b_{\max(p,q)} \neq 0$ alors $\deg(P+Q) = \max(p,q)$. Mais, Si $a_{\max(p,q)} + b_{\max(p,q)} = 0$ alors $\deg(P+Q) < \max(p,q)$. Ainsi, dans tous les cas, $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
De plus, $si\ \deg(P) = p < q = \deg(Q)$alors $\max(p,q) = q$ *et* $a_{\max(p,q)} + b_{\max(p,q)} = a_q + b_q = b_q$. Donc $codom(P+Q) = codom(Q)$.Mais si $\deg(P) = p = q = \deg(Q)$alors $\max(p,q) = q = q$ *et* $a_{\max(p,q)} + b_{\max(p,q)} = a_p + b_p$. SI $a_p + b_p = 0$ alors $deg(P+Q) < deg(P) = deg(Q)$ .Par contre, si $a_p + b_p \neq 0$ alors $deg(P+Q) = deg(P) = deg(Q)$ *et* $codom(P+Q) = codom(P) + codom(Q)$.

25 Généralisation : Soit $P_1, P_2, \dots, P_m$ des éléments de $K[X]$ et $\beta_1, .., \beta_m$ des éléments de K.

- $\deg(\prod_{k=1}^m P_k) = \sum_{k=1}^m \deg(P_k)$ et si $P_1, P_2, \dots, P_m$ sont tous non nuls, alors $\text{codom}(\prod_{k=1}^m P_k) = \prod_{k=1}^m codom(P_k)$.
- $\deg(\sum_{k=1}^m \beta_k P_k) \leq \max(\deg(P_1), \dots, \deg(P_m))$ et si pour tout $k \in \{1, \dots, m-1\}$, $\deg P_m > degP_k$ et $\beta_m \neq 0$ alors $\deg(\sum_{k=1}^m \beta_k P_k) = degP_m$ et $\text{codom}(\sum_{k=1}^m \beta_k P_k) = \beta_m codom(P_m)$.

26 Exemples importants:
$\deg((X-\mu)^n) = n$ et si $\beta \neq 0$ alors $\deg(\beta(X-\mu_1)^{n_1}(X-\mu_2)^{n_2} \dots (X-\mu_r)^{n_r}) = \sum_{k=1}^r n_k$.
De plus, $\text{codom}((X-\mu)^n) = 1$ et si $\beta \neq 0$ alors $\deg(\beta(X-\mu_1)^{n_1}(X-\mu_2)^{n_2} \dots (X-\mu_r)^{n_r}) = \beta$.

26 Exemple : Soit $P \in K[X]$ *et* $Q(X) = P(X+1) - P(X)$. Déterminons le degré de Q en fonction de celui de P et le cas échéant son coefficient dominant. On sait que : $degP(X+1) = degP \times deg(X+1) = degP$. Donc, $degQ \leq degP$. De plus $codomP(X+1) = codomP \times codom(X+1) = codomP$. Donc, $degQ \leq degP - 1$.
Si $degP = 0$ alors $Q = 0$
Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ *avec* $n = degP \geq 1$ alors

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^n a_k (X+1)^k = a_n(X+1)^n + a_{n-1}(X+1)^{n-1} + \underbrace{R(X)}_{\substack{de\ degré \\ \leq n-2}} \overset{FBN}{=} a_n X^n + n a_n X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-1} + \underbrace{T(X)}_{\substack{de\ degré \\ \leq n-2}}$$

Donc , $P(X+1) - P(X) = n a_n X^{n-1} + \underbrace{L(X)}_{de\ degré \leq n-2}$. Donc $degQ = n-1$ *et* $codomQ = n a_n$.

27 Exercice : Montrer que : $\boxed{deg(P \circ Q) = \begin{cases} -\infty & si\ P = 0\ ou\ (Q = 0\ et\ le\ terme\ constant\ de\ P\ est\ nul) \\ 0 & si\ \ Q = 0\ et\ le\ terme\ constant\ de\ P\ n'est\ pas\ nul \\ \deg(P) \times \deg(Q) & si\ P\ et\ Q\ sont\ non\ nuls \end{cases}}$

28 Déf Un polynôme P de $K[X]$ est dit scindé (sur K) lorsqu'il peut s'écrire comme un produit de polynômes de $K[X]$ de degré 1 .

29 Remarque : voici trois écritures sous forme scindée d'un même polynôme :

$$P = (a_1X + b_1)(a_2X + b_2) \dots .(a_sX + b_s) \underset{\substack{en\ mettant \\ a_k(\neq 0)\ en\ facteur \\ dans\ chaque \\ parenthèse}}{\Longleftrightarrow} P = \beta(X-\alpha_1)(X-\alpha_2) \dots (X-\alpha_s) \underset{\substack{en\ regroupant \\ les facteurs \\ contenant \\ le\ même\ \alpha}}{\Longleftrightarrow} P = \beta(X-\mu_1)^{n_1}(X-\mu_2)^{n_2} \dots (X-\mu_r)^{n_r} .$$

5. l'ensemble $K_n[X]$.

30 Def Soit n un entier naturel. On note $K_n[X]$ l'ensemble des polynômes (à une indéterminée) à coefficient dans K et de degré **inférieur ou égal** à n .

31 Exemples : $K_0[X]$ est l'ensemble des polynômes constants.
$K_1[X] = \{aX + b\ /a, b\ \ scalaires\}$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.
32 NB : $K_n[X] \subset K_{n+1}[X]$
D'après ce qui précède , on peut affirmer que :

33 Theo Tout polynôme de $K_n[X]$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $1, X, X^2, \dots, X^n$.

On dira que la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $K_n[X]$.

34 notation : On note souvent E_n l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inferieur ou égal à n.
On a les mêmes définitions et les mêmes résultats sur les fonctions polynomiales associées.

II Polynômes dérivés

1. Définition, écriture et degré

35 Déf: Soit $P=\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$. Le polynôme dérivé de P est : $P^{(1)}=P'=\sum_{k=1}^{p} k a_k X^{k-1}=\sum_{k=0}^{p-1}(k+1)a_{k+1}X^k$.
On définit alors les polynômes dérivés successifs :
par convention , $P^{(0)}=P$ est le polynôme dérivé $0^{ème}$ de P
Et $\forall j\in\mathbb{N}^*$, $P^{(j)}=\left(P^{(j-1)}\right)'$ est le polynôme dérivé $j^{ème}$ de P.

36 Conséquence: on retrouve les formules de dérivation des fonctions polynomiales. Autrement dit, pour tout entier naturel j , $\tilde{P}^{(j)}=\widetilde{P^{(j)}}$. On a aussi les mêmes règles de calcul :

37 Règles de calcul Soit j un entier naturel , α , β , γ des scalaires et P et Q des polynômes .
$(\beta P+\gamma Q)^{(j)}=\beta P^{(j)}+\gamma Q^{(j)}$
$(PQ)^{(j)}=\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}P^{(l)}Q^{(j-l)}$ (Leibniz)
$(P\circ Q)'=Q'\times(P'\circ Q)$
$(P\circ(X-\alpha))^{(j)}=P^{(j)}(X-\alpha)$
$$\left(\prod_{j=1}^{m}P_j\right)'=\sum_{i=1}^{n}P_i'\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}P_j\right)$$

38 Prop : Pour tous entiers naturels k et j ,$\left(X^k\right)^{(j)}=\begin{cases}0\ si\ j>k\\ \frac{k!}{(k-j)!}X^{k-j}\ \ si\ j\leq k\end{cases}$

39 Prop : Pour tout entier naturel j et tout polynôme $P=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$,
$P^{(j)}=\begin{cases}0\ si\ j>p\\ \sum_{k=j}^{p}a_k\ \frac{k!}{(k-j)!}X^{k-j}\ \ si\ j\leq p\end{cases}$

40 Prop : si P est non nul alors,
$deg\left(P^{(j)}\right)=\begin{cases}-\infty & si\ j>\deg(P)\\ \deg(P)-j & si\ j\leq\deg(P)\end{cases}$ et si $j\leq\deg(P)$ alors $codom\left(P^{(j)}\right)=\frac{\deg(P)!}{(\deg(P)-j)!}codom(P)$.

Démo : Soit $P=\sum_{k=0}^{\deg(p)}a_kX^k$un polynôme non nul $et\ j\in\mathbb{N}$.
D'après ce qui précède, $P^{(j)}=\begin{cases}0\ si\ j>\deg(P)\\ \sum_{k=j}^{\deg(P)}a_k\ \frac{k!}{(k-j)!}X^{k-j}\ \ si\ j\leq\deg(P)\end{cases}$. Donc, si $j>\deg(P)\ alors\ \deg\left(P^{(j)}\right)=-\infty$. Par contre, si $j\leq$ $\deg(P)$, alors comme $a_{\deg(P)}\frac{\deg(P)!}{(\deg(P)-j)!}\neq 0$, on peut affirmer que $\deg\left(P^{(j)}\right)=\deg(P)-j\ et\ \mathrm{codom}\left(P^{(j)}\right)=\frac{\deg(P)!}{(\deg(P)-j)!}codom(P)$.

41 Théo : Soit $P=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ un polynôme.
Alors , $\forall j\in\mathbb{N},\ a_j=\frac{\tilde{P}^{(j)}(0)}{j!}$ et $P=\sum_{k=0}^{p}\frac{\tilde{P}^{(k)}(0)}{k!}X^k$

Démo : Le résultat est évident avec un polynôme *P* nul. Soit $P=\sum_{k=0}^{\deg(p)}a_kX^k$un polynôme non nul $et\ j\in\mathbb{N}$.
D'après la prop39, $P^{(j)}=\begin{cases}0\ si\ j>\deg(P)\\ \sum_{k=j}^{\deg(P)}a_k\ \frac{k!}{(k-j)!}X^{k-j}\ \ si\ j\leq\deg(P)\end{cases}$. Donc, $\forall t\in K,\tilde{P}^{(j)}(t)=\begin{cases}0\ si\ j>\deg(P)\\ \sum_{k=j}^{\deg(P)}a_k\ \frac{k!}{(k-j)!}t^{k-j}\ \ si\ j\leq\deg(P)\end{cases}$.
En particulier, $\tilde{P}^{(j)}(0)=\begin{cases}0=0\times j!=\underbrace{a_j}_{=0}\times j! & si\ j>\deg(P)\\ \sum_{k=j}^{\deg(P)}a_k\ \frac{k!}{(k-j)!}0^{k-j}=a_j\frac{j!}{(0)!}0^0=a_jj! & si\ j\leq k\end{cases}=a_jj!$. Ainsi, $a_j=\frac{\tilde{P}^{(j)}(0)}{j!}$ valable pour tout $j\in\mathbb{N}$.
Il s'en suit que $P=\sum_{j=0}^{\deg(P)}\frac{\tilde{P}^{(j)}(0)}{j!}X^j$.

42 Exemple : Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ non nul de degré n et $Q=(X^2+1)P''-6P$. Déterminons le degré de Q et le cas échéant son coefficient dominant .
On sait que : $\deg\left((X^2+1)P''\right)=2+degP''=degP=\deg(-6P)$. Donc $degQ\leq degP$.

De plus, $\text{codom}\big((X^2+1)P''\big) = codom(P'') = n(n-1)codom(P)\ et\ codom(-6P) = -6codom(P)$. On a deux cas :
Si $n(n-1)-6 \neq 0\ ie\ n \neq 3$ alors $degQ = degP = n$ et $codom(Q) = (n(n-1)-6)codom(P)$
Si $n(n-1)-6 = 0\ ie\ n = 3$ alors $degQ < degP$.Posons $P = a+bX+cX^2+dX^3$.
Alors $P'' = 2c+6dX$ et $Q = (X^2+1)(2c+6dX) - 6(a+bX+cX^2+dX^3) = (2c-6a)+(6d-6b)X-4cX^2$).Donc , $degQ = \begin{cases} 2\ si\ c \neq 0 \\ 1\ si\ c = 0\ et\ d \neq b \\ 0\ si\ c = 0\ , d = b\ et\ a \neq 0 \\ -\infty\ si\ c = 0 = a\ , d = b \end{cases}$ et $codom(Q) = \begin{cases} -4c\ si\ c \neq 0 \\ 6d-6b\ si\ c = 0\ et\ d \neq b \\ 2c-6a\ si\ c = 0\ , d = b\ et\ a \neq 0 \\ n'existe\ pas\ si\ c = 0 = a\ \ et\ d = b \end{cases}$

2. Formule de Taylor pour les polynômes

43 Théo : Soit P un élément de $K_n[X]\ et\ \alpha$ un élément de K . Alors , $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$et cette écriture est l'unique manière d'écrire P comme combinaison linéaire des polynômes $1, X-\alpha, (X-\alpha)^2, \dots, (X-\alpha)^n$.

On dira que la famille $(1, X-\alpha, (X-\alpha)^2, \dots, (X-\alpha)^n)$ est une base $de\ K_n[X]$.

Démo : Soit P un élément de $K_n[X]\ non\ nul\ et\ \alpha$ un élément de K.

Existence : Posons $Q = P \circ (X+\alpha) = P(X+\alpha)$. Alors d'après le théo 41, $Q = \sum_{k=0}^{\deg(Q)} \frac{\tilde{Q}^{(j)}(0)}{j!}X^j$.

De plus, $degQ = degP \times \deg(X+\alpha) = \deg(P) \leq n$. Donc $Q = \sum_{j=0}^{n} \frac{\tilde{Q}^{(j)}(0)}{j!}X^j$ car $\forall j > \deg(Q)\ , Q^{(j)} = 0$.

Enfin, on montre par récurrence sur j que : $\forall j \in \mathbb{N}, Q^{(j)} = P^{(j)} \circ (X+\alpha)$. Donc, $\forall j \in \mathbb{N}, \forall t \in K, \tilde{Q}^{(j)}(t) = \tilde{P}^{(j)}(t+\alpha)$.Il s'en suit que : $\tilde{Q}^{(j)}(0) = \tilde{P}^{(j)}(\alpha)$. Et ainsi, $Q = \sum_{j=0}^{n} \frac{\tilde{P}^{(j)}(\alpha).}{j!}X^j$. Alors $P = Q \circ (X-\alpha) = Q(X-\alpha) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\tilde{P}^{(j)}(\alpha).}{j!}(X-\alpha)^j$. Le polynôme P est donc bien une combinaison linéaire des polynômes $1, (X-\alpha), (X-\alpha)^2, \dots, (X-\alpha)^n$.

Unicité : Si $P = \sum_{j=0}^{n} b_j(X-\alpha)^j = \sum_{j=0}^{n} c_j(X-\alpha)^j$ alors $Q = P(X+\alpha) = \sum_{j=0}^{n} b_jX^j = \sum_{j=0}^{n} c_jX^j$ et par unicité des coefficients d'un polynôme, $\forall j, b_j = c_j$. D'où l'unicité de l'écriture.

44 Corollaire

- Si deux polynômes ont toutes leurs dérivées successives qui prennent les mêmes valeurs en un scalaire α alors ces polynômes sont égaux .
- Le polynôme nul est le seul polynôme dont toutes les dérivées successives s'annulent en α. Si $\deg(P) \leq n$ et il existe un réel α tq : $P(\alpha) = P^{(1)}(\alpha) = .. = P^{(n)}(\alpha) = 0$ alors P est le polynôme nul.

45 Exemple : Les polynômes P vérifiant : $P'(2) = 2P^{(4)}(2)$ sont tous les polynômes de la forme $a_0 + a_1(X-2) + a_2(X-2)^2 + a_3(X-2)^3 + \frac{a_1}{2\times 4!}(X-2)^4 + a_5(X-2)^5 + .. + a_n(X-2)^n$ où $n \in \mathbb{N}\ et\ a_0, a_1, a_2, a_3, a_5, .., a_n\ des$ scalaires .