

V Factorisation en produit de facteurs irréductibles

1. Théorème de d'Alembert-Gauß

77 Théorème de d'Alembert Gauss : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant a au moins une racine complexe.

Démo hors programme

78 Exemple : Trouver tous les P polynômes de $K[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$.

Ou bien P est constant alors $P(X+1) = P(X)$.

Ou bien P est non constant alors P a au moins une racine complexe notée α (théo 77). Imaginons un instant que $P(X+1) = P(X)$.

Alors, $\forall z \in \mathbb{C}, \tilde{P}(z) = \tilde{P}(z+1)$. En particulier pour $z = \alpha$, on a : $0 = \tilde{P}(\alpha) = \tilde{P}(\alpha+1)$. Donc $\alpha+1$ est racine de P . Puis

pour $z = \alpha+1$, on a : $0 = \tilde{P}(\alpha+1) = \tilde{P}(\alpha+2)$. Donc, $\alpha+2$ est racine de P . Puis pour $z = \alpha+2, \dots$. On montre ainsi que $\forall k \in \mathbb{N}, \alpha+k$ est racine de P (recurrence !). Donc P a une infinité de racines ce qui implique que $P = 0$ et ce qui contredit P non constant.

J'en déduis que $P(X+1) \neq P(X)$ dans le cas où P n'est pas constant.

Ainsi, les polynômes P de $K[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$ sont les polynômes constants.

2. Factorisation d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

79 Théorème : Seuls les polynômes de degré 1 sont irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Démo Rappel : un polynôme irréductible est un polynôme non constant n'admettant comme diviseurs que les polynômes constants ou ses associés. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur à 2. Alors P a une racine complexe α et il existe donc un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ tel que : $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$. Alors $\deg(Q) = \deg(P) - 1$. Donc $\deg(P) > \deg(Q) \geq 1$ donc Q est un diviseur de P , non constant et non associé à P . Ainsi, P n'est pas irréductible.

80 Théorème : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant est scindé sur $\mathbb{C}$ et sa forme scindée est unique.

Autrement dit, pour tout P de $\mathbb{C}[X]$ non constant, il existe un unique entier naturel non nul s , une unique famille de s nombres complexes distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ et une unique famille de s entiers naturels non nuls $m_1, \dots, m_s$ tels que : $P = \text{codom}(P) \prod_{k=1}^s (X - \alpha_k)^{m_k}$.

Démo : Existence : Soit $H(n)$: « si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg P = n$ alors P est scindé sur $\mathbb{C}$ »

Initialisation : pour $n = 1$, c'est évident.

Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je suppose que $H(n)$ est vraie. $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg P = n+1$ alors P a une racine complexe α (théo 77) et il existe donc un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ tel que : $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$. Alors $\deg(Q) = \deg(P) - 1 = n$. Donc par hypothèse de récurrence Q est scindé sur $\mathbb{C}$ i.e. Q est le produit de polynômes de degré 1. Par conséquent, P est aussi le produit de polynômes de degré 1. **CCL :** $\forall n \geq 1, H(n)$ vraie.

Unicité : Si $P = \beta \prod_{k=1}^s (X - \alpha_k)^{m_k}$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ complexes distincts, $m_1, \dots, m_s$ entiers naturels non nuls et β complexe non nul alors $\beta = \text{codom}(P)$ (unique car coeff de P) et $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sont les seules racines de P et sont de multiplicité respective $m_1, \dots, m_s$ (unicité de la multiplicité car unicité du plus petit entier k tel que $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$). Donc la forme scindée est unique (à l'ordre des facteurs près).

81 Conséquence1 Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non nul a un nombre de racines comptées avec leur multiplicité égal à son degré.

82 Conséquence2 Soit P et Q deux polynômes non nuls.

$P = Q$ si et ssi P et Q ont exactement les mêmes racines complexes avec la même multiplicité et les mêmes coefficients dominants.

83 Exemple CLASSIQUE : Soit $P = 3X^5 - 10X^4 + 15X^3 - 15X^2 + 10X - 3$. Trouver la forme scindée de P sur $\mathbb{C}$.

Tout d'abord, je remarque que $\tilde{P}(1) = 0$ i.e. 1 est racine de P . Cherchons la multiplicité de 1 dans P :

$$P' = 15X^4 - 40X^3 + 45X^2 - 30X + 10 \text{ donc } \tilde{P}'(1) = 0$$

$$P'' = 60X^3 - 120X^2 + 90X - 30 \text{ donc } \tilde{P}''(1) = 0$$

$$P''' = 180X^2 - 240X + 90 \text{ donc } \tilde{P}'''(1) \neq 0.$$

J'en déduis que 1 est racine triple de P .

Donc, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)^3 Q(X)$ et Q est le quotient la division euclidienne de P par $(X-1)^3$. Posons cette division : $3X^5 - 10X^4 + 15X^3 - 15X^2 + 10X - 3$ par $X^3 - 3X^2 + 3X - 1$.

$$\begin{array}{r} 3X^5 - 10X^4 + 15X^3 - 15X^2 + 10X - 3 \\ \underline{3X^5 - 9X^4 + 9X^3 - 3X^2} \\ -X^4 + 6X^3 - 12X^2 + 10X - 3 \\ \underline{-X^4 + 3X^3 - 3X^2 + X} \\ 3X^3 - 9X^2 + 9X - 3 \\ \underline{3X^3 - 9X^2 + 9X - 3} \\ 0 \end{array}$$

Donc, $P(X) = (X-1)^3 (3X^2 - X + 3)$. De plus, $\frac{1+i\sqrt{3}}{6}$ et $\frac{1-i\sqrt{3}}{6}$ sont les deux racines de Q et

$$Q(X) = 3(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{6})(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{6}). \text{ Ainsi, } P(X) = 3(X-1)^3 (X - \frac{1+i\sqrt{3}}{6})(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{6}).$$

3. Factorisation d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

84 Théorème : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\omega \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$.

ω est une racine de P d'ordre de multiplicité (ou au moins) m

si et ssi $\bar{\omega}$ est une racine de P d'ordre de multiplicité (ou au moins) m .

Démo : Si P est nul alors le résultat est évident.

Soit P un polynôme non nul à coefficients réels tel que $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ tq $a_0, a_1, \dots, a_d$ réels et $a_d \neq 0$.

$$1) \quad \omega \text{ est une racine de } P \Leftrightarrow \tilde{P}(\omega) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^d a_k \omega^k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^d \overline{a_k} \overline{\omega^k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^d \overline{a_k} \overline{\omega}^k = 0$$

car $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$
 $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^d a_k \bar{\omega}^k = 0 \Leftrightarrow \tilde{P}(\bar{\omega}) = 0 \Leftrightarrow \bar{\omega} \text{ est une racine de } P.$$

car les a_k sont réels

$$2) \quad \omega \text{ est une racine de } P \text{ d'ordre de multiplicité } m \Leftrightarrow \omega \text{ est une racine de } P, P', \dots, P^{(m-1)} \text{ mais pas de } P^{(m)}.$$

$$\Leftrightarrow \bar{\omega} \text{ est une racine de } P, P', \dots, P^{(m-1)} \text{ mais pas de } P^{(m)}.$$

j' applique 1) à $P, P', \dots, P^{(m)}$
qui sont tous à coeff. réels.

$$\Leftrightarrow \bar{\omega} \text{ est une racine de } P \text{ d'ordre de multiplicité } m.$$

85 Exemple CLASSIQUE : Déterminons tous les entiers naturels n non nuls tq : $B = (X^2 + X + 1)^2$ divise $P = (1 + X)^n - X^n - 1$.

$$B = (X^2 + X + 1)^2 = (X - j)^2 (X - j^2)^2. \text{ Donc,}$$

B divise $P \Leftrightarrow$ les racines de B sont racines de P avec une multiplicité dans P au moins égale à celle dans B

$\Leftrightarrow j$ et $j^2 (= \bar{j})$ sont racines de P de multiplicité au moins 2.

$\Leftrightarrow j$ est racine de P de multiplicité au moins 2.

car P est à coef réels (théo 84)

$$\Leftrightarrow \tilde{P}(j) = \tilde{P}'(j) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+j)^n - j^n - 1 = 0 \\ n(1+j)^{n-1} - nj^{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-j^2)^n - j^n - 1 = 0 \quad (1) \\ (-j^2)^{n-1} - j^{n-1} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$j = e^{2i\pi/3}$ et $j^2 = e^{4i\pi/3} = \bar{j}$
 $1, j$ et j^2 sont les racines 3èmes de l'unité.
 j et j^2 sont les racines de $1 + X + X^2$
 $1 + j + j^2 = 0$
 $\forall k \in \mathbb{N}, j^{3k} = 1, j^{3k+1} = j, j^{3k+2} = j^2,$

$$\text{Or, équation(2)} \Leftrightarrow (-j^2)^{n-1} - j^{n-1} = 0 \Leftrightarrow (-1)^{n-1} j^{2(n-1)} - j^{n-1} = 0 \Leftrightarrow (-1)^{n-1} j^{(n-1)} - 1 = 0 \Leftrightarrow j^{(n-1)} = (-1)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow j^{(n-1)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ impair} \\ -1 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \Leftrightarrow n \text{ impair et } j^{(n-1)} = 1$$

impossible.

$$\Leftrightarrow n \text{ impair et } n-1 \text{ est un multiple de } 3$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe } k \text{ et } p \text{ entiers naturels tq: } n = 2k + 1 \text{ et } n = 3p + 1.$$

$$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} / n = 6p + 1.$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n = 6p + 1$. Regardons si l'autre équation(1) est vérifiée:

$$(-j^2)^n - j^n - 1 = (-j^2)^{6p+1} - j^{6p+1} - 1 = -j^{12p+2} - j^{6p+1} - 1 = -j^{12p} j^2 - j^{6p} j - 1 \stackrel{\forall k \in \mathbb{N}, j^{3k} = 1}{=} -j^2 - j - 1 = 0. \text{ OK !}$$

Donc les solutions de notre problème sont tous les entiers de la forme $6p + 1$ tels que $p \in \mathbb{N}$.

- 86 Conséquences :** 1. Tout polynôme non nul à coefficients réels possède un nombre pair de racines complexes non réelles.
 2. Tout polynôme réel de degré impair a au moins une racine réelle.

Démo : 1. Soit P un polynôme non nul à coefficients réels. Ou bien P a zéro (nombre pair) racine complexe non réelle. Ou bien P a un nombre n non nul de racines complexes non réelles. Parmi ces n racines complexes non réelles, on compte une racine et sa racine conjuguée qui ont la même multiplicité dans P . Notons $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ les racines complexes non réelles distinctes avec partie imaginaire positive. Alors, $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_r$ sont les racines complexes non réelles avec partie imaginaire négative. Donc, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_r$ sont toutes les racines complexes non réelles et distinctes de P . Donc P a exactement $\underbrace{2r}_{\text{entier pair}}$ racines complexes

non réelles distinctes. De plus, dans P , ω_1 et $\bar{\omega}_1$ ont la même multiplicité p_1 , idem pour $\omega_2, \dots, \omega_r$. Donc, $p_1 + \dots + p_r + p_1 + \dots + p_r = 2(\sum_{i=1}^r p_i)$ est le nombre de racines complexes non réelles de P comptées avec leur multiplicité. OK !

2. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $2n + 1$. Alors P non nul et P a $2n + 1$ racines complexes dont $2p$ racines complexes non réelles. P a donc $2n + 1 - (2p)$ racines réelles. Or, $2n + 1 - 2p > 0$. Donc P a au moins une racine réelle.

87 Théorème :

1. Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

2. Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ non constant se factorise de manière unique en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Plus précisément, pour tout P de $\mathbb{R}[X]$ non constant, il existe deux uniques entiers naturels non tous nuls r et s , une unique famille de s nombres réels distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, une unique famille de r couples de réels $(b_1, c_1), \dots, (b_r, c_r)$ et une unique famille de $s + r$ entiers naturels non nuls $m_1, \dots, m_s, p_1, \dots, p_r$ tels que :

$$P = \text{codom}(P) \left[\prod_{k=1}^s \underbrace{(X - \alpha_k)^{m_k}}_{\text{facteurs avec les racines réelles}} \right] \left[\prod_{k=1}^r \underbrace{(X^2 + b_k X + c_k)^{p_k}}_{\text{facteurs avec les racines complexes conjuguées}} \right] \text{ et pour tout } k \in \{1, \dots, r\}, b_k^2 - 4c_k < 0$$

Démo : 1) On sait déjà que les polynômes de degré 1 sont irréductibles. Soit P un polynôme à coefficients réels tq $\deg(P) \geq 2$. Alors P est aussi dans $\mathbb{C}[X]$. Donc P a une racine complexe notée α .

Ou bien $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, $(X - \alpha)$ est un diviseur de P dans $\mathbb{R}[X]$ qui n'est ni constant ni associé de P (puisque les associés de P ont le même degré que P). Donc P n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. En particulier, les polynômes de degré 2 à discriminant positif ne sont pas irréductibles.

Ou bien $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Et dans ce cas, $\bar{\alpha}$ est aussi racine de P . Par conséquent, $B = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = X^2 - (\alpha + \bar{\alpha})X + \alpha\bar{\alpha} = X^2 - 2\text{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$ divise P .

Si $\deg P > 2$ alors $\deg(P) > \deg(B)$ et par conséquent B n'est pas associé à P (ni constant) donc P n'est pas irréductible.

Si $\deg P = 2$ i.e. P est de degré 2 à discriminant strictement négatif et α et $\bar{\alpha}$ sont les seules racines de P (**). Imaginons un instant que P admette un diviseur dans $\mathbb{R}[X]$ non constant et non associé. Ce diviseur est donc nécessairement de degré 1 i.e. de la forme $A = aX + b = a\left(X + \frac{b}{a}\right)$ où a et b réels et a non nuls. Un tel facteur contient donc une racine réelle de A et donc P qui est $-\frac{b}{a}$ ce qui est impossible d'après (**); donc P est irréductible.

Ainsi, Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

2) Soit P un polynôme à coefficients réels non constant de degré d . Alors P est exactement d racines complexes comptées avec leur multiplicité : s racines réelles distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ de multiplicité $m_1, \dots, m_s$ et $2r$ racines complexes non réelles distinctes $\omega_1, \dots, \omega_s, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_s$ de multiplicité $p_1, \dots, p_s$. Alors la forme scindée de P dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X) = \text{codom}(P) \left[\prod_{k=1}^s (X - \alpha_k)^{m_k} \right] \left[\prod_{k=1}^r (X - \omega_k)^{p_k} (X - \bar{\omega}_k)^{p_k} \right].$$

$$\text{Or, } (X - \omega)^p (X - \bar{\omega})^p = ((X - \omega)(X - \bar{\omega}))^p = \underbrace{\left(X^2 - \underbrace{(\omega + \bar{\omega})}_{=2\text{Re}(\omega)} X + \underbrace{\omega\bar{\omega}}_{=|\omega|^2} \right)}_{\text{polynôme irréductible dans } \mathbb{R}[X]}^p$$

$$P(X) = \text{codom}(P) \left[\prod_{k=1}^s (X - \alpha_k)^{m_k} \right] \left[\prod_{k=1}^r (X^2 - 2\text{Re}(\omega_k)X + |\omega_k|^2)^{p_k} \right]$$

Et cette écriture est unique car la forme scindée sur $\mathbb{C}$ de P est unique.

88 NB : $\deg(P) = \sum_{k=1}^s m_k + 2 \sum_{k=1}^r p_k.$

En pratique : comment factoriser un polynôme en produit de facteurs irréductibles

89 Dans $\mathbb{C}[X]$: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors la forme scindée de P est l'écriture de P comme produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Pour trouver la forme scindée de P , il suffit :

- 1) de trouver soit toutes les racines complexes de P en résolvant l'équation $\tilde{P}(z) = 0$ d'inconnue z complexe soit d'en trouver quelques-unes évidentes (mais alors je n'ai peut-être pas toutes les racines de P).

- 2) d'étudier leur multiplicité dans P :

Ou bien $\deg(P)$ = nbre de racines distinctes trouvées. Alors toutes les racines sont simples et

$$P = \text{codom}(P) \prod_{k=1}^{\deg(P)} (X - \alpha_k).$$

Ou bien $\deg(P) >$ nbre de racines distinctes trouvées. Je cherche alors à savoir quelles sont les racines multiples en calculant $\tilde{P}'(\alpha_k), \tilde{P}''(\alpha_k), \dots$. On compte, à nouveau, les racines mais cette fois avec leur multiplicité et on compare avec $\deg(P)$. Si $\deg(P)$ est égal à ce nombre alors je peux factoriser P sous forme scindée.

Dans le cas où je n'ai trouvé que quelques racines évidentes de P , il faut chercher leur multiplicité exacte dans P , factoriser par le facteur correspondant et chercher les racines de l'autre facteur.....

- 3) Ecrire la forme scindée sans oublier le coefficient dominant de P .

89 Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factorisons sous forme scindée dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P_n = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{X}{n}\right)^n$.

Cherchons les racines complexes de P_n : Soit z complexe. $\tilde{P}(n) \neq 0$. Prenons $z \neq n$.

$$\tilde{P}_n(z) = 0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n = 0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} \text{ est une racine } n\text{ième de l'unité.}$$

$$P_n(z) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / \frac{1+z}{1-z} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / z \left(\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1+e^{-\frac{2ik\pi}{n}}} \right) = n(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1).$$

s' annule pour n pair et $k = \frac{n}{2}$

Ou bien n impair. Alors, $P_n(z) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / z = n \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = i \times n \times \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Les racines de P_n sont les imaginaires purs :

$i \times n \times \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ tq $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Or $\tan$ est injective que $[0, \pi] \setminus \{\pi/2\}$ et $\left(\frac{k\pi}{n}\right) \in [0, \pi] \setminus \{\pi/2\}$ quand $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Donc P_n a n racines distinctes. Or $\deg(P) \leq \max\left(\deg\left(1 + \frac{X}{n}\right)^n, \deg\left(1 - \frac{X}{n}\right)^n\right) = n$. J'en déduis que $\deg(P_n) = n$ et ses racines sont toutes simples et $\text{codom} P_n = \text{codom}\left(1 + \frac{X}{n}\right)^n - \text{codom}\left(1 - \frac{X}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{n}\right)^n - \left(-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{2}{n^n}$. Ainsi, $P_n = \frac{2}{n^n} \prod_{k=0}^{n-1} (X - i \times n \times \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right))$.

Ou bien n pair Alors, $1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$ pour $k = \frac{n}{2}$. Par conséquent, $P_n(z) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \setminus \{n/2\} / z = i \times n \times \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Donc P_n a $n-1$ racines distinctes qui les imaginaires purs : $i \times n \times \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ tq $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \setminus \{n/2\}$.

De plus, $\deg\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = n$ et $\text{codom}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \frac{1}{n^n}$ et $\deg\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = n$ et $\text{codom}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = (-1/n)^n \underset{\substack{\text{car } n \\ \text{pair}}}{=} \frac{1}{n^n}$. J'en déduis que :

$\deg P_n < n$. De plus le coefficient du terme de degré $n-1$ est $2n\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} \neq 0$. Donc $\deg P_n = n-1$ et $\text{codom} P_n = 2(1/n)^{n-2}$. Du coup, les $n-1$ racines sont toutes simples et $P_n = \frac{2}{n^{n-2}} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{n}{2}}}^{n-1} (X - i \times n \times \tan \frac{k\pi}{n})$.

90 Dans $\mathbb{R}[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. Donc $P \in \mathbb{C}[X]$ et P est scindé sur $\mathbb{C}$. Pour écrire P comme produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, il suffit :

- 1) D'écrire P sous forme scindée dans $\mathbb{C}[X]$ avec la méthode précédente.
- 2) D'isoler les facteurs avec racines réelles (polynômes de degré 1 irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$).
- 3) De regrouper 2 à 2 les facteurs avec racines complexes conjuguées, afin de faire apparaître les polynômes de degré 2 à

coefficients réels et irréductibles : $(X - \alpha)^p (X - \bar{\alpha})^p = ((X - \alpha)(X - \bar{\alpha}))^p = \underbrace{\left(X^2 - \frac{(\alpha + \bar{\alpha})}{2\text{Re}(\alpha)} X + \frac{\alpha \bar{\alpha}}{|\alpha|^2}\right)}_{\text{polynôme irréductible}}^p$.

90 Exemple : parfois on parvient à factoriser P sans chercher les racines ...

$$P = 1 + X^2 + X^4 = (X^2 - j)(X^2 - j^2) = \underbrace{(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X + e^{i\frac{\pi}{3}})(X - j)(X + j)}_{\text{la factorisation de } P \text{ dans } \mathbb{C}[X]}$$

$$P = (X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X + e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}})(X + e^{-i\frac{\pi}{3}}) = \left[(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}})\right] \left[(X + e^{i\frac{\pi}{3}})(X + e^{-i\frac{\pi}{3}})\right]$$

$$P = \left[X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)X + 1\right] \left[X^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)X + 1\right] = \underbrace{[X^2 - X + 1][X^2 + X + 1]}_{\substack{\text{la factorisation de } P \text{ dans } \mathbb{R}[X] \\ \text{en produit de facteurs irréductibles}}}$$

92 Exemple Revenons à $P_n = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{X}{n}\right)^n$.

Si n impair alors P_n a une racine réelle $i \times n \times \tan \frac{k\pi}{n} = 0$ pour $k = 0$.

$$P_n = \frac{2}{n^n} X \prod_{k=1}^{n-1} (X - i \times n \times \tan \frac{k\pi}{n}) = \frac{2}{n^n} X \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (X - i \times n \times \tan \frac{k\pi}{n}) \prod_{k=\frac{(n+1)}{2}}^{n-1} (X - i \times n \times \tan \frac{k\pi}{n})$$

$$P_n = \frac{2}{n^n} X \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (X - i \times n \times \tan \frac{k\pi}{n}) \prod_{p=1}^{\frac{(n-1)}{2}} \left(X - i \times n \times \tan \left(\frac{(n-p)\pi}{n}\right)\right) \text{ chgt d'indice } k = n - p$$

$$P_n = \frac{2}{n^n} X \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X - i \times n \times \tan \left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \left(X - i \times n \times \tan \left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

$$P_n = \frac{2}{n^n} X \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X - i \times n \times \tan \left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \left(X + i \times n \times \tan \frac{k\pi}{n}\right).$$

$$P_n = \frac{2}{n^n} X \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X + n^2 \times \tan^2 \left(\frac{k\pi}{n}\right)\right). \text{ Décomposition de } P_n \text{ en produit de facteurs irréductibles de } \mathbb{R}[X].$$

Si n pair alors P_n a une racine réelle $i \times n \times \tan \frac{k\pi}{n} = 0$ pour $k = 0$ et

$$P_n = \frac{2}{n^{n-2}} X \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \frac{n}{2}}}^{n-1} (X - i \times n \times \tan \frac{k\pi}{n}). \text{ Avec les mêmes calculs, on obtient :}$$

$$P_n = \frac{2}{n^{n-2}} X \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (X + n^2 \times \tan^2 \frac{k\pi}{n}). \text{ Décomposition de } P_n \text{ en produit de facteurs irréductibles de } \mathbb{R}[X].$$

93 Exemple important: Factorisons $X^n - 1$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. $X^n - 1$ admet les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité comme racine. Comme $\deg(X^n - 1) = n$, ces racines sont toutes simples et

$$X^n - 1 = 1 \times \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}) \text{ factorisation sous forme scindée dans } \mathbb{C}[X].$$

Si n pair alors $X^n - 1$ a deux racines réelles qui sont : 1 (pour $k = 0$) et -1 ($k = \frac{n}{2}$) et

$$X^n - 1 = (X - 1)(X + 1) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \frac{n}{2}}}^{n-1} (X - e^{i\frac{2k\pi}{n}})$$

$$X^n - 1 = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X - \underbrace{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}_{\substack{\text{de partie} \\ \text{imaginaire positive}}}\right) \prod_{k=\frac{n}{2}+1}^{n-1} \left(X - \underbrace{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}_{\substack{\text{de partie} \\ \text{imaginaire négative}}}\right).$$

$$X^n - 1 = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (X - e^{i\frac{2k\pi}{n}})(X - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}).$$

$$X^n - 1 = (X - 1) \underbrace{(X + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X^2 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) X + 1 \right)}_{Q(X)} \text{ dans } \mathbb{R}[X] \dots$$

Si n impair alors $X^n - 1$ a une seule racine réelles et

$$X^n - 1 = (X - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right) = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right) \prod_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right).$$

$$X^n - 1 = (X - 1) \underbrace{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X^2 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) X + 1 \right)}_{Q(X)}.$$

$$\text{Enfin, } X^n - 1 \stackrel{\substack{\text{formule} \\ \text{de factorisation}}}{=} (X - 1) \underbrace{\left(1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} \right)}_{T(X)} \stackrel{\text{d'après ce qui précède}}{=} (X - 1)Q(X).$$

Donc, $(X - 1)[T(X) - Q(X)] = 0$. Comme $\mathbb{R}[X]$ est intègre et $X - 1$ n'est pas la polynôme nul, nécessairement $T(X) - Q(X) = 0$.

$$\text{Je conclus que : } (1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}) = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}) = \begin{cases} (X + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X^2 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) X + 1 \right) & \text{si } n \text{ pair} \\ \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X^2 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) X + 1 \right) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}.$$

94 Cas des polynômes réels réciproques : Un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ réel et de degré n est dit réciproque lorsque :

$\forall k, a_{n-k} = a_k$ (ce qui revient à dire que pour tout cpxe z non nul, $\tilde{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{P(z)}{z^n} \dots$ (à prouver!)).

Exemple : $P = 5 + 2X - 7X^2 - 7X^3 + 2X^4 + 5X^5$.

On remarque alors que :

- si n est impair alors -1 est racine de P , on a alors $P = (X + 1)Q$ avec $\deg Q$ pair et Q réciproque.
- Si z est racine de P alors $\frac{1}{z}$ l'est aussi.

Pour déterminer les racines complexes non nulles et non évidentes d'un polynôme réciproque P de degré pair,

on pose $w = z + \frac{1}{z}$ et on obtient : $\tilde{P}(z) = 0$ (*) $\underbrace{\text{si etssi}}_{\substack{\text{en mettant} \\ z^{n/2} \text{ en facteur}}} T(w) = 0$ (**) où T polynomiale de degré $\frac{n}{2}$.

On résout (**) (on trouve les valeurs de w) puis on résout $w = z + \frac{1}{z}$ pour chaque valeur trouvée de w .

95 Exemple : Factorisons $P(X) = 1 + 2X - X^2 + 2X^3 + X^4$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Cherchons tout d'abord les racines complexes de P , $\tilde{P}(0) \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et posons $w = z + \frac{1}{z}$.

$$\begin{aligned} P(z) = 1 + 2z - z^2 + 2z^3 + z^4 = 0 &\Leftrightarrow \underbrace{z^2}_{\neq 0} \left(\underbrace{z^2 + \frac{1}{z^2}}_{w^2 - 2} + 2 \left(\underbrace{z + \frac{1}{z}}_w \right) - 1 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (w^2 - 2) + 2w - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow w^2 + 2w - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow w = 1 \text{ ou } w = -3 \\ &\Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 1 \text{ ou } z + \frac{1}{z} = -3 \\ &\Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \text{ ou } z^2 + 3z + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -j \text{ ou } z = -j^2 \text{ ou } z = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } z = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

P a 4 racines distinctes et $\deg P = 4$
donc ces racines sont toutes simples

$$\text{Ainsi, } P = \underbrace{(X + j)(X + j^2) \left(X + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(X + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)}_{\substack{\text{la factorisation de } P \text{ dans } \mathbb{C}[X] \\ \text{en produit de facteurs irréductibles}}} = \underbrace{(X^2 - X + 1) \left(X + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(X + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)}_{\substack{\text{la factorisation de } P \text{ dans } \mathbb{R}[X] \\ \text{en produit de facteurs irréductibles}}}.$$

Contrôle qualité : somme des racines de $P = -j - j^2 + \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} + \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} = 1 - 3 = -2 \stackrel{\text{OK}}{=} -\frac{\text{coeff de } X^3}{\text{coeff dominant}}.$

$$\text{Produit des racines de } P = (-j)(-j^2) \left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \stackrel{\text{OK}}{=} (-1)^4 \frac{\text{coeff constant}}{\text{coeff dominant}}.$$

VI Décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles réelles.

96 Déf. : Une fonction rationnelle réelle est un quotient de fonctions polynômiales réelles.

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fonction rationnelle. F est dite irréductible lorsque A et B n'ont aucun facteur irréductible commun.

97 Déf. : Soit $F = \frac{A}{B}$ une fonction rationnelle. La partie entière E de F est la fonction quotient de la division euclidienne de A par B . On a alors : $F = E + \frac{R}{B}$ avec $\deg R < \deg B$ et R est fonction reste de la division euclidienne de A par B .

98 Décomposition en éléments simples de G : Soit $\frac{R}{B}$ un représentant irréductible de G .

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, B(x) = \text{codom}(B) [\prod_{k=1}^s (x - \alpha_k)^{m_k}] [\prod_{k=1}^r (x^2 + b_k x + c_k)^{p_k}]$

• Chaque facteur de la forme $(x - \alpha)^m$ donne m éléments simples de la forme $\frac{\gamma_l}{(x - \alpha)^l}$ (dits de première espèce)

où $l \in \{1, \dots, m\}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$. (Exemple : $\frac{1}{(x+1)^2(x-3)^4} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x-3)} + \frac{d}{(x-3)^2} + \frac{e}{(x-3)^3} + \frac{f}{(x-3)^4}$).

• Chaque facteur $(x^2 + bx + c)^p$ donne p éléments simples de la forme $\frac{\delta_l x + \beta_l}{(x^2 + bx + c)^l}$ (dits de deuxième espèce)

où $l \in \{1, \dots, p\}$ et $(\alpha_l, \beta_l) \in \mathbb{R}^2$. (Exemple : $\frac{1}{(x^2+1)^2(x-1)^3(x^2-x+1)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{ux+v}{x^2+1} + \frac{sx+t}{(x^2+1)^2} + \frac{qx+r}{x^2-x+1}$).

On obtient alors $\forall x \in D_F, G(x) = \frac{R(x)}{B(x)} = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^{m_k} \frac{\gamma_{lk}}{(x - \alpha_k)^l} \right)}_{\substack{\text{1ère} \\ \text{expression} \\ \text{de } G}} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^{p_k} \frac{\delta_{lk}x + \beta_{lk}}{(x^2 + b_kx + c_k)^l} \right)}_{\substack{\text{2ème} \\ \text{expression} \\ \text{de } G}}$

$$\text{et } F(x) = E(x) + \left(\sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^{m_k} \frac{\gamma_{lk}}{(x - \alpha_k)^l} \right) + \left(\sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^{p_k} \frac{\delta_{lk}x + \beta_{lk}}{(x^2 + b_kx + c_k)^l} \right)$$

99 Remarque : le nombre de réels γ, β, δ à déterminer est égal à $\deg(B)$.

100 En pratique :

- On détermine E et R en effectuant la division euclidienne de A par B ou en « bidouillant » (Cf. méthode pour le calcul intégral).
- On factorise B dans $\mathbb{R}[X]$.
- On cherche les racines communes de R et B et on simplifie $G = R/B$.
- On écrit la forme générale de la décomposition en éléments simples de G .
- On détermine les valeurs des coefficients $\gamma_{lk}, \delta_{lk}, \beta_{lk}$ par diverses méthodes :
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow \alpha_k} (x - \alpha_k)^{m_k} G(x)$ avec les deux expressions de G .
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} xG(x)$ avec les deux expressions de G .
 - Attribuer à x une valeur particulière autorisée dans $D_F = D_G$.
 - Mettre sur le même dénominateur dans les deux expressions et identifier les numérateurs donc leurs coefficients pour obtenir un système linéaire.

101 Exemple : Décomposons en éléments simples $F(x) = \frac{x^5 - 3x^4 + x^3 + 5x}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 4}$.

Je pose $A(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 + 5x$ et $B(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$.

1) J'effectue la division euclidienne de A par B et je trouve : $A(x) = xB(x) + x$. Donc, $F(x) = x + \frac{x}{B(x)}$.

2) Je factorise B en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Je remarque que $B(2) = 0$. De plus, $B'(2) = 0$. Donc $(x - 2)^2$ divise

$B(x)$. En posant la division euclidienne, j'obtiens : $B(x) = \left(\frac{x^2 + x + 1}{\substack{\Delta < 0 \text{ dc} \\ \text{irréductible} \\ \text{dans } \mathbb{R}[X]}} \right) (x - 2)^2$.

3) J'écris la décomposition théorique de $G(x) = \frac{x}{(x^2 + x + 1)(x - 2)^2}$: il existe a, b, c et d réels tels que : $\forall x \neq 2$,
4 réels car $\deg(B) = 4$

$$G(x) = \frac{x}{(x^2 + x + 1)(x - 2)^2} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{(x - 2)^2} + \frac{cx + d}{x^2 + x + 1}.$$

4) Je détermine les valeurs de a, b, c et d :

$$b = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^2 G(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x^2 + x + 1)} = \frac{2}{7}.$$

$$cj + d = \lim_{x \rightarrow j} (x^2 + x + 1) G(x) = \frac{j}{(j - 2)^2} = \frac{j(j^2 - 2)^2}{(j - 2)^2(j^2 - 2)^2} = \frac{j(j^4 - 4j^2 + 4)}{(j - 2)^4} = \frac{j(j + 4(1 + j) + 4)}{49} = \frac{5j^2 + 8j}{49} = \frac{-5(1 + j) + 8j}{49} = \frac{-5 + 3j}{49}.$$

$$c(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + d = \frac{-5 + 3(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})}{49}. \text{ Donc, en identifiant parties réelles et imaginaires, } c = \frac{3}{49} \text{ et } d - \frac{c}{2} = \frac{-5}{49} - \frac{1}{2} \frac{3}{49} \text{ donc, } d = \frac{-5}{49}.$$

$$\text{Enfin, } a + c = \lim_{x \rightarrow +\infty} xG(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x^2 + x + 1)(x - 2)^2} = 0. \text{ Donc, } a = -\frac{3}{49}.$$

5) **Conclusion** : $F(x) = x - \frac{3}{49} \frac{1}{x - 2} + \frac{2}{7} \frac{1}{(x - 2)^2} + \frac{1}{49} \frac{3x - 5}{x^2 + x + 1}.$

102 Deux applications : calcul intégral et calcul de somme.

103 Exemple : Calculons $I = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3(x^2+1)^2} dx$.

1) Décomposons l'intégrande $G(x)$ en éléments simples. $\deg(\text{numérateur de } G(x)) < \deg(\text{dénominateur de } G(x))$. Donc la partie entière de cette fraction $G(x)$ est nulle. Alors il existe $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels uniques tels que : pour tout complexe x

$$\text{distinct de } -1, i \text{ et } -i, \quad G(x) = \frac{1}{(x+1)^3(x^2+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} + \frac{\alpha x + \beta}{x^2+1} + \frac{\gamma x + \delta}{(x^2+1)^2}.$$

- $c = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^3 G(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}$
- $\gamma i + \delta = \lim_{x \rightarrow i} (x^2+1)^2 G(x) = \lim_{x \rightarrow i} \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{1}{(1+i)^3} = \frac{1}{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) (1+i) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$. Dc, $\gamma = \delta = -\frac{1}{4}$.
- $a + \alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} x G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x+1)^3(x^2+1)^2} = 0$. Donc, $a + \alpha = 0$.
Donc, $G(x) = \frac{1}{(x+1)^3(x^2+1)^2} = \frac{ax^2+a-ax^2-ax+\beta x+\beta}{(x+1)(x^2+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} + \frac{\gamma x+\delta}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax+\beta x+\beta+a}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} + \frac{\gamma x+\delta}{(x^2+1)^2}$
- $-a + \beta + b = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x+1)^3(x^2+1)^2} = 0$. Donc, $-a + \beta + b = 0$.
- $G(0) = 1 = a + b + c + \beta + \delta$. Donc, $a + b + \beta = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$.
- $G(1) = \frac{1}{32} = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c}{8} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} + \frac{\delta}{4}$. Donc, $\frac{1}{4} = 4a + 2b + c + 4\alpha + 4\beta + 2\gamma + 2\delta$ et $4a + 2b + 4\alpha + 4\beta = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = 1$.

On obtient le système :

$$\begin{cases} a + \alpha = 0. \\ -a + \beta + b = 0 \\ a + b + \beta = 1 \\ 4a + 2b + 4\alpha + 4\beta = 1. \end{cases} \text{ dc, } \begin{cases} a + \alpha = 0. \\ -a + \beta + b = 0 \\ a + b + \beta = 1 \\ 2b + 4\beta = 1. \end{cases} \text{ dc, } \begin{cases} a + \alpha = 0. \\ -a + \beta + b = 0 \\ 2a = 1 \\ b + 2\beta = \frac{1}{2}. \end{cases} \text{ dc, } \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2}. \\ \beta + b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \\ b + 2\beta = \frac{1}{2}. \end{cases} \text{ dc, } \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2}. \\ \beta + b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \\ \beta = 0. \end{cases} \text{ dc } \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2}. \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \\ \beta = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } G(x) = \frac{1}{(x+1)^3(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{4} \frac{x+1}{(x^2+1)^2}.$$

$$2) \text{ Intégrons } G. \text{ On a : } I = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} - \frac{1}{8} \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{8} \frac{1}{x^2+1} \right] - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\ln(2)}{4} + \frac{9}{32} - \frac{1}{4} J.$$

$$\text{Et } J = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \int_0^1 \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(0) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x}{v(x)} \frac{2x}{u'(x)} dx$$

$$J \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{-x}{(x^2+1)} \right] - \int_0^1 \frac{-1}{(x^2+1)} dx \right\} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} (\text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(0)) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

$$\text{Ainsi, } I = \frac{\ln(2)}{4} + \frac{9}{32} - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\ln(2)}{4} + \frac{7}{32} - \frac{\pi}{32}.$$

104 Exemple : Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2(n+1)}$ converge et déterminer sa somme.

- $\forall n, u_n \geq 0$: et $u_n \sim \frac{1}{n^3}$. Or la série de terme général $\frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente. Donc la série de terme général $\frac{1}{n^2(n+1)}$ est convergente.

- De plus, $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2(n+1)} \stackrel{\text{décompo express en éléments simples}}{=} \sum_{n=1}^N -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n^2} = -\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$

$$S_N = -\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = -1 + \frac{1}{N+1} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}. \text{ Donc, } \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = -1 + \frac{\pi^2}{6}. \text{ Donc la série de terme général } u_n \text{ est convergente et sa somme } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -1 + \frac{\pi^2}{6}.$$