Séance du jeudi 21 mars (fin). Cours chapitre « POLYNÔMES » suite.

III Divisibilité

1. Définition

46 Déf Soit A *et* B deux polynômes de $K[X]$.
On dit que B divise A (dans $K[X]$) lorsqu' il existe un polynôme Q (de $K[X]$) tel que : $A = BQ$.

47 Rques: • Tout polynôme divise 0, 0 ne divise que 0 .

- Les polynômes constants non nuls divisent tout polynôme. Tout polynôme P est divisible par tout polynôme βP tels que $\beta \in K^*$. Ces polynômes βP tels que $\beta \neq 0$ sont appelés les polynômes associés de P.
- Si B divise A non nul alors $deg(B) \leq deg(A)$.

48 Exemples

1) La formule de factorisation assure que $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall (A,B) \in K[X]^2, A - B$ divise $A^m - B^m$.
2) $X^2 + X + 1$ et $X - 1$ divise $X^3 - 1$ dans $\mathbb{R}$[X] (d'après la formule de factorisation 16) et $X - j, X - j^2$, $X - 1$ divisent $X^3 - 1$ dans $\mathbb{C}$[X]. $X - i$ *et* $X + i$ divisent $X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}$[X] .

49 Déf: Un polynôme P, non constant, est irréductible lorsque ses seuls diviseurs dans $K[X]$ sont les polynômes constants et ses associés.

50 Théo : Tout polynôme de $K[X]$ de degré 1 est irréductible dans $K[X]$.

Démo : Soit A un polynôme de $K[X]$ de degré 1 et B l'un de ses diviseurs dans $K[X]$. Alors il existe $Q \in K[X]$ tq : $A = BQ$.
Donc, $1 = deg(A) = deg(B) + deg(Q)$. Par conséquent,
ou bien $deg(B) = 1$ *et* $deg(Q) = 0$ et dans ce cas, $Q = \beta \in K^*$ *et* $B = \frac{1}{\beta}A$ est associé à A.
ou bien $deg(B) = 0$ *et* $deg(Q) = 1$ et dans ce cas, $B = \beta \in K^*$ polynôme constant.
J'en conclus que les diviseurs de A sont constants ou associés à A ce qui signifie que A est irréductible.

51 Déf-prop : Un polynôme P est unitaire lorsque P non nul et $codom(P) = 1$.
Tout polynôme non nul a un polynôme associé unitaire.

Démo : Soit Q un polynôme non nul. Alors $Q = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ *avec* $n = deg(Q)$et donc $a_n \neq 0$.
Par conséquent, $Q = a_n \underbrace{\left(X^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} X^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{a_n}\right)}_{=P\ unitaire} = a_n P$ avec P unitaire. Alors P est un associé unitaire de Q.

2. Théorème de la division euclidienne

52 Théorème de la division euclidienne : Soit A *et* B deux éléments $K[X]$ tels que $B \neq 0$.
Alors il existe un unique polynôme Q et un unique polynôme R tels que : $A = BQ + R$ **et** $degR < degB$.

Démo de l'unicité : Supposons qu'il existe R_1, R_2, Q_1, Q_2 polynômes tels que :
$A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ *et* $deg(R_1) < deg(B)$*et* $deg(R_2) < deg(B)$.
Alors $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1 (*)$. Donc, $\deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) = \deg(R_2 - R_1) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B)$.
Par conséquent, $\deg(Q_1 - Q_2) < 0$. Cela implique que $\deg(Q_1 - Q_2) = -\infty$ i.e. $Q_1 - Q_2 = 0$. Ainsi $Q_1 = Q_2$.
Alors $(*)$ donne $R_1 - R_2 = 0$. Ainsi $R_1 = R_2$. D'où l'unicité de Q et R s'ils existent….

Démo de l'existence : Ou bien B *cst* non nul i.e. $B = b \in K^*$. Alors $A = B \times \underbrace{\frac{1}{b}A}_{=Q} + \underbrace{0}_{=R}$. Alors Q et R conviennent.

Ou bien B non cst. Notons $p = deg(B) \geq 1$ *et* $B = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$ avec $b_p \neq 0$. Faisons une preuve par récurrence…
Posons H_n la propriété : « si A est un polynôme tel que $deg(A) \leq n$ alors il existe deux polynômes Q et R tels que $\deg(R) < deg(B)$ et $A = BQ + R$ »
Initialisation. soit $n = 0$. *Soit* A un polynôme tq $\deg(A) \leq 0 < \deg(B)$.Donc, $A = B \times \underbrace{0}_{=Q} + \underbrace{A}_{=R}$ et Q et R ainsi définis vérifient les propriétés souhaitées. J'en déduis que H_0vraie.
Propagation : soit $n \in \mathbb{N}$. Je suppose que $H_n$est vraie et je vais montrer sous cette hypothèse que H_{n+1}est vraie. Je suppose donc que $deg(A) \leq n + 1$.
Ou bien $deg(A) \leq n$ alors H_n s'applique à A et je peux affirmer qu'il existe deux polynômes Q et R tels que $\deg(R) < deg(B)$ et $A = BQ + R$
Ou bien $deg(A) = n + 1$. Posons $A = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k$ avec $a_{n+1} \neq 0$. On a : $a_{n+1}X^{n+1} = b_p X^p \times \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p}$.
On pose alors $Q_n = \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p}$ et $A_1 = A - Q_n B$.

Or, $\deg(Q_nB) = \deg(Q_n) + \deg(B) = n + 1 - p + p = \deg(A)$ et $codom(Q_nB) = codom(Q_n)codom(B) = \frac{a_{n+1}}{b_p} b_p = a_{n+1} = codom(A)$. Donc, $\deg(A_1) < \deg(A) = \deg\,(Q_nB)$. Par conséquent $\deg(A_1) \leq n$. Alors je peux appliquer $H_n$au polynôme A_1. Il existe donc deux polynômes Q_1 et R_1 tels que $\deg\,(R_1) < deg(B)$ et $A_1 = BQ_1 + R_1$. Par conséquent, $BQ_1 + R_1 \ = A - Q_nB$.
Il s'en suit que $A = B(Q_1 + Q_n) + R_1\ avec\ \deg\,(R_1) < deg(B)$. Donc $Q = Q_1 + Q_n$ et $R = R_1$conviennent.
J'en conclus que $H_n \Rightarrow H_{n+1}$.
<u>CCL :</u> le théorème de récurrence simple permet de conclure que : $\forall n \in \mathbb{N}, H_n$vraie. Et par conséquent pour tout polynôme A, il existe deux polynômes Q et R tels que $\deg\,(R) < deg(B)$ et $A = BQ + R$. Et ces deux polynômes ont uniques d'après ce qui précède.

53 En pratique. Cf vidéo… pour vous exercer :

$$
\begin{array}{c|c}
2X^5 - 3X^4 + X^2 - 4X + 1 & 3X^2 - 2X - 2 \\
\underline{-\left(X^5 - \frac{4}{3}X^4 - \frac{4}{3}X^3\right)} & \hline
-\frac{5}{3}X^4 + \frac{4}{3}X^3 + X^2 - 4X + 1 & \frac{2}{3}X^3 - \frac{5}{9}X^2 + \frac{2}{27}X + \frac{1}{81} \\
\underline{-\left(-\frac{5}{3}X^4 + \frac{10}{9}X^3 + \frac{10}{9}X^2\right)} & \\
\frac{2}{9}X^3 - \frac{1}{9}X^2 - 4X + 1 & \\
\underline{-\left(\frac{2}{9}X^3 - \frac{4}{27}X^2 - \frac{4}{27}X\ \right)} & \\
\frac{1}{27}X^2 - \frac{104}{27}X + 1 & \\
\underline{-\left(\frac{1}{27}X^2 - \frac{2}{81}X - \frac{2}{81}\right)} & \\
-\frac{310}{81}X + \frac{83}{81} &
\end{array}
$$

Alors, on a : $2X^5 - 3X^4 + X^2 - 4X + 1 = (3X^2 - 2X - 2)\left(\frac{2}{3}X^3 - \frac{5}{9}X^2 + \frac{2}{27}X + \frac{1}{81}\right) + \left(-\frac{310}{81}X + \frac{83}{81}\right)$

54Premier critère de divisibilité : B divise A si et ssi le reste de la division euclidienne de A par B est nul.