

COURS :

$$\alpha \text{ est racine de } P \text{ dans } K \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in K \\ \text{et} \\ \tilde{P}(\alpha) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists Q \in K[X]/P(X) = (X - \alpha)Q(X).$$

$$\alpha \text{ est racine de } P \text{ dans } K \text{ d'ordre de multiplicité } m \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in K \\ \text{et} \\ \exists Q \in K[X]/P(X) = (X - \alpha)^m Q(X) \\ \text{et} \\ \tilde{Q}(\alpha) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in K \\ \text{et} \\ \tilde{P}(\alpha) = \tilde{P}'(\alpha) = \dots = \tilde{P}^{(m-1)}(\alpha) = 0, \\ \text{et} \\ \tilde{P}^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

$$\alpha \text{ est racine de } P \text{ dans } K \text{ de multiplicité au moins } m \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in K \\ \text{et} \\ \exists Q \in K[X]/P(X) = (X - \alpha)Q(X) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in K \\ \text{et} \\ \tilde{P}(\alpha) = \tilde{P}'(\alpha) = \dots = \tilde{P}^{(m-1)}(\alpha) = 0 \end{cases}$$

P admet, dans K , les racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ de multiplicité $m_1, m_2, \dots, m_s \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 1, s \rrbracket, \alpha_k \in K \\ \text{et} \\ \exists Q \in K[X]/P(X) = \prod_{k=1}^s (X - \alpha_k)^{m_k} Q(X) \\ \text{et} \\ \forall k \in \llbracket 1, s \rrbracket, \tilde{Q}(\alpha_k) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \llbracket 1, s \rrbracket, \alpha_k \in K \\ \text{et} \\ \forall k \in \llbracket 1, s \rrbracket, \tilde{P}(\alpha_k) = \tilde{P}'(\alpha_k) = \dots = \tilde{P}^{(m_k-1)}(\alpha_k) = 0. \\ \text{et} \\ \tilde{P}^{(m_k-1)}(\alpha_k) \neq 0 \end{cases}$$

$$P \text{ est scindé sur } K \Leftrightarrow \begin{cases} P \neq 0 \\ \text{et} \\ P \text{ a un nbre de racines égal à son degré } \dots \end{cases}$$

Plus précisément,

$$P = \beta \prod_{k=1}^s (X - \alpha_k)^{m_k} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^s m_k = \deg(P) \\ \forall k \in \llbracket 1, s \rrbracket, \alpha_k \text{ est racine de } P \text{ dans } K \text{ de multiplicité au moins } m_k. \\ \text{et } \text{codom}(P) = \beta \end{cases}$$

Soit A et B deux polynômes de $K[X]$ et B non nul. La division euclidienne de A par B dit que :

$$\exists ! (Q, R) \in K[X]^2 / A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B).$$

B divise $A \Leftrightarrow \exists Q \in K[X] / A = BQ \Leftrightarrow$ le reste de la division euclidienne de A par B est nul $\Leftrightarrow$ toutes les racines de B sont racines de A avec une multiplicité dans A supérieure ou égale à celle dans B .

Le nombre de racines dans K d'un polynôme non nul de $K[X]$ est inférieur ou égal au degré de ce polynôme.

$P = 0 \Leftrightarrow$ tous les coefficients de P sont nuls $\Leftrightarrow P$ a plus de racines que son degré $\Leftrightarrow P$ et toutes ses dérivées s'annulent en un même scalaire.

$P = Q \Leftrightarrow P$ et Q ont les mêmes coefficients $\Leftrightarrow P - Q$ a plus de racines que son degré $\Leftrightarrow \exists \alpha \in K / \forall k \in \mathbb{N}, \tilde{P}^{(k)}(\alpha) = \tilde{Q}^{(k)}(\alpha).$

Si P est scindé alors la somme ses racines est égale à $-\frac{a_{p-1}}{a_p}$ et le produit de ses racines est égal à $(-1)^p \frac{a_0}{a_p}$ où

$$P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \text{ et } p = \deg(P).$$