Ex1

Ex 1 *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $X^2 - 2Xcosa + 1$ divise $X^n sina - Xsin(na) + sin(n-1)a$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Notons $B = X^2 - (2\cos a)X + 1$

et $P = (\sin a)X^n - (\sin(na))X + \sin((n-1)a)$

• Ecrivons B sous forme scindée sur $\mathbb{C}$.

Je sais résoudre : $z^2 - (2\cos a)z + 1 = 0$.

Posons $\Delta = 4\cos^2 a - 4 = 4(\cos^2 a - 1) = -4\sin^2 a$

Alors $\Delta = (2i\sin a)^2$

et $\alpha_1 = \dfrac{2\cos a - 2i\sin a}{2} = e^{-ia}$

et $\alpha_2 = \dfrac{2\cos a + 2i\sin a}{2} = e^{ia}$

Donc $B = (X - e^{ia})(X - e^{-ia})$

• 1er cas $e^{ia} \neq e^{-ia}$ ie $e^{ia} \neq \pm 1$ ie $a \not\equiv 0 [\pi]$

B divise P

$\Leftrightarrow$ les racines de B sont racines de P avec une multiplicité dans P supérieure ou égale à celle dans B.

$\Leftrightarrow$ e^{ia} et e^{-ia} sont racines de P.

$\Leftrightarrow$ e^{ia} est racine de P

car P est à coef réels. et $\overline{e^{ia}} = e^{-ia}$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{P}(e^{ia}) = 0$

• Or, $\tilde{P}(e^{ia}) = (\sin a)(e^{ia})^n - (\sin(na))(e^{ia}) + \sin((n-1)a)$

$= (\sin a)[\cos(na) + i\sin(na)]$

$- \sin(na)[\cos a + i\sin a]$

$+ \sin((n-1)a)$

$\tilde{P}(e^{ia}) = \underbrace{\sin a\cos(na) - \sin(na)\cos a}_{= -\sin((n-1)a)} + \sin((n-1)a)$

$+ i\,[\underbrace{\sin a \sin(na) - \sin(na)\sin a}_{=0}]$

$\tilde{P}(e^{ia}) = 0$

Ainsi, B divise P si $a \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

• 2ème cas $a \equiv 0 [\pi]$

Dans ce cas, $P = 0$. Donc B divise P.