Ex 1

Ex 1 Produit de deux fonctions polynomiales.

Montrer que : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k x^k + o_0(x^n)$ où $a_k = \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p}$ (Cf DL9).

1) D'après le cours,

$$\ln(1+x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k}_{P(x)} + o_0(x^n) \quad \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k} = a_k\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k}_{Q(x)} + o_0(x^n) \quad \left((-1)^k = b_k\right)$$

sont les $DL_n(0)$ de $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{1+x}$.

• $DL_n(0)$ usuels !

Alors le cours assure que $\ln(1+x) \times \frac{1}{1+x}$ admet le $DL_n(0)$ suivant :

• $DL_n(0)$ d'un produit de deux fonctions admettant des $DL_n(0)$.

$\ln(1+x)\frac{1}{1+x} =$ (somme des termes de degré inf ou égal à n de $P(x) \times Q(x)$) $+ o_0(x^n)$.

Or, $\boxed{P(x)Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} c_k x^k \text{ avec } c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}}$ ⟵ FORMULE du PRODUIT DE DEUX POLYNÔMES.

je tronque !

avec $\begin{cases} a_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0 \\ \frac{(-1)^{j-1}}{j} & \text{si } j \geq 1 \end{cases} \\ \text{et} \\ b_{k-j} = (-1)^{k-j} \end{cases}$

Donc $c_0 = 0$
et $\forall k \geq 1$, $c_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} (-1)^{k-j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{k-1}}{j}$

car $a_0 = 0$

$\forall k \geq 1$, $c_k = (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} = (-1)^{k-1} a_k$

Ainsi $\boxed{\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k x^k + o_0(x^n)}$