

Ex 1

Ex 1 Produit de deux fonctions polynomiales.

Montrer que : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k x^k + o_0(x^n)$ où $a_k = \sum_{p=1}^k \frac{1}{p}$ (Cf DL9).

1) D'après le cours,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n-1} x^n}_{P(x)} + o_0(x^n) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sont les } DL_n(0) \\ \text{de } \ln(1+x) \\ \text{et } \frac{1}{1+x}. \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^k x^k}_{Q(x)} + o_0(x^n)$$

Alors le cours assure que $\ln(1+x) \times \frac{1}{1+x}$ admet le $DL_n(0)$ suivant :

$$\ln(1+x) \frac{1}{1+x} = (\text{somme des termes de degré inférieur ou égal à } n \text{ de } P(x) \times Q(x)) + o_0(x^n).$$

Or, $P(x)Q(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ avec $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$

avec $a_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j=0 \\ \frac{(-1)^{j-1}}{j} & \text{si } j \geq 1 \end{cases}$
et $b_{k-j} = (-1)^{k-j}$

Donc $c_0 = 0$
et $\forall k \geq 1, c_k = \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} (-1)^{k-j} = \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{k-1}}{j}$

$\forall k \geq 1, c_k = (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} = (-1)^{k-1} a_k$

Ainsi $\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k x^k + o_0(x^n)$

$DL_n(0)$ utiles !

$DL_n(0)$ d'un produit de deux fonctions admettant des $DL_n(0)$.

← FORMULE DU PRODUIT DE DEUX POLYNÔMES.

car $a_0 = 0$