Ex 2

1. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient $P(X+1) = P(X)$.
2. En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $(X+3)P(X) = XP(X+1)$.

1) On cherche tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $P(X+1) = P(X)$.

- Je remarque tout d'abord que tous les polynômes constants sont solutions.
- Soit P un polynôme non nul.

Alors, $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où $d = \deg P \geq 0$.

Donc, $P(X+1) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k$

$$P(X+1) = a_d (X+1)^d + a_{d-1}(X+1)^{d-1} + \dots + a_0$$
$$\overset{FBN}{=} a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + T(X)$$

avec $\deg T \leq d-2$.

par unicité des coef d'un polynôme

Alors, $P(X+1) = P(X) \Rightarrow d a_d + a_{d-1} = a_{d-1}$

$\Rightarrow d a_d = 0$

$\Rightarrow d = 0$ ou $\underbrace{a_d = 0}_{\text{impossible car } a_d = \text{codom}(P)}$

$\Rightarrow d = 0$

$\boxed{P(X+1) = P(X) \Rightarrow P \text{ polynôme cst}}$

Ainsi,

$\boxed{\text{les polynômes de } \mathbb{R}[X] \text{ vérifiant } P(X+1) = P(X) \text{ sont les polynômes constants réels.}}$

2) On cherche ici tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tq : $(X+3)P(X) = XP(X+1)$.

- Je remarque que le polynôme nul est solution
- Soit P un polynôme solution de notre problème ie $P \in \mathbb{R}[X]$ et

$$(X+3)P(X) = XP(X+1) \quad (*)$$

Analyse :

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $(t+3)\tilde{P}(t) = t\tilde{P}(t+1)$

En particulier, pour $t=0$, on obtient

$3\tilde{P}(0) = 0$ dc $\tilde{P}(0) = 0$ donc 0 racine de P

et pour $t=-3$, on obtient

$0\tilde{P}(-3) = -3\tilde{P}(-2)$ donc $\tilde{P}(-2) = 0$ et -2 est racine de P.

Ensuite pour $t=-1$, on obtient :

$2\tilde{P}(-1) = -1 \underbrace{\tilde{P}(0)}_{=0} = 0$ dc $\tilde{P}(-1) = 0$ donc -1 est racine de P.

Enfin pour $t=-2$, on obtient :

$(-2+3)\tilde{P}(-2) = -2\underbrace{\tilde{P}(-1)}_{=0} = 0$ dc $\tilde{P}(-2) = 0$ donc -2 est racine de P (...)

En essayant d'autres valeurs, je ne trouve pas d'autres racines... donc j'arrête ici de prendre des valeurs de t.

Ainsi, P admet $0, -2, -1$ comme racines

Donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tq

$\boxed{P(X) = X(X+1)(X+2)Q(X)}$.

Alors $(*)$ s'écrit

$$(X+3)X(X+1)(X+2)Q(X) = X(X+1)(X+2)(X+3)Q(X+1)$$

Donc $\underbrace{X(X+1)(X+2)(X+3)}_{T(X)} \underbrace{[Q(X) - Q(X+1)]}_{U(X)} = 0$

$T(X) \times U(X) = 0$

Or, T n'est pas le polynôme nul (car $\deg T = 4$) et le produit polynomial est intègre.

($UT = 0 \Leftrightarrow U = 0$ ou $T = 0$)

Donc nécessairement, $U(X) = 0$ ie

$Q(X) = Q(X+1)$. Alors d'après 1),

Q est un polynôme constant et ainsi $\boxed{P(X) = cX(X+1)(X+2) \text{ tq } c \text{ cste réelle}}$

ccl de l'analyse : les solutions de notre pble sont parmi les polynômes de la forme $cX(X+1)(X+2)$ tq c cste réelle

Synthèse ces polynômes $cX(X+1)(X+2)$ tq c cstes réelles sont-ils tous solution de notre pble ?

Prenons $P = cX(X+1)(X+2)$ tq $c \in \mathbb{R}$

Alors $P \in \mathbb{R}[X]$ et

$$\begin{aligned} XP(X+1) &= Xc(X+1)(X+2)(X+3) \\ &= (X+3)\left[cX(X+1)(X+2)\right] \\ &= (X+3)P(X) \end{aligned}$$

OK.

Ainsi, P est solution.

CCL : Les solutions de notre pble sont tous les polynômes de la forme : $P(X) = cX(X+1)(X+2)$ où c constante réelle.