

Ex2

Ex 2 Déterminer tous les polynômes P tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$. (on raisonnera par analyse-synthèse. Dans l'analyse, on cherchera d'abord le degré, sa parité puis une expression d'un tel polynôme P).

Tout d'abord, je remarque que le polynôme nul est solution.

• Cherchons les autres solutions:

Analyse Supposons qu'il existe un polynôme P non nul tel que : $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Notons $d = \deg P$.

$$\text{Alors } \deg P(X^2) = \deg P \times \deg X^2 = 2d$$

$$\text{et } \deg (X^2 + 1)P = \deg (X^2 + 1) + \deg P = 2 + d.$$

Donc pour que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ il faut que $\deg(P(X^2)) = \deg((X^2 + 1)P(X))$ et donc que $2d = d + 2$ i.e. $d = 2$.

Donc parmi les polynômes non nuls, seuls les polynômes de degré 2 peuvent être solutions de notre pble.

Synthèse Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ $\forall a \neq 0$.

$$\text{Alors } P(X^2) = a(X^2)^2 + b(X^2) + c$$

$$P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c$$

$$\text{et } (X^2 + 1)P(X) = (X^2 + 1)(aX^2 + bX + c)$$

$$(X^2 + 1)P(X) = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$$

Par conséquent, P est solution de notre problème si et seulement si :

$$\begin{aligned} aX^4 + bX^2 + c &= aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c \\ &\Rightarrow aX^4 + bX^2 + (a+c)X^2 + bX + c \end{aligned}$$

si et si :

$$\begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ a + c = b \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

par unité des coef d'un polynôme

si et si :

$$\begin{cases} b = 0 \\ c = -a \end{cases}$$

si et si $P = a[X^2 - 1]$.

all : les polynômes $a(X^2 - 1)$ $\forall a \in K^*$ sont les polynômes non nuls sol^o de notre problème.

Ainsi, les solutions de notre pble sont tous les polynômes de la forme $a(X^2 - 1)$ $\forall a \in K$ (en prenant $a=0$, on retrouve la solution nulle).

- COURS -

$\deg P \times Q = \deg P + \deg Q$ si P non nul et Q non nul.

$\deg P \times Q = \deg P + \deg Q$ (tjs vrai).

unité de l'écriture sous forme développée = unité des coef :

Si $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ et $Q(X) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_1 X + b_0$.

alors :

$$\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ \vdots \\ a_n = b_n \end{cases}$$