Ex 2 Bis

Ex 2 bis (pour réviser seul) Solutions polynomiales d'une équa diff.

1. Chercher toutes les fonctions polynomiales solutions de l'équation différentielle (E): $(x^2+1)y'' - 2y = -x$.
2. En déduire une solution φ non nulle de (EH).
3. En déduire toutes les solutions de (E) en les cherchant sous la forme $y(x) = k(x)\varphi(x)$.

Notons (E) cette équation différentielle.

1. Je remarque tout d'abord que la fonction polynomiale $(x \to \frac{x}{2})$ est une solution polynomiale évidente.

- Cherchons les autres. Soit f une fct° polynomiale de degré $n \geq 2$.
- Évaluons tout d'abord le degré de f.

f sol° de E $\Rightarrow \forall x, (x^2+1)f''(x) - 2f(x) = -x$

$\boxed{f \text{ sol° de } (E) \Rightarrow \deg((x^2+1)f''(x) - 2f(x)) = 1}$

Or, $\deg(x^2+1)f''(x) = \deg(x^2+1) + \deg f''(x)$
$= 2 + \deg f''(x)$ $\deg f \geq 2$
$= 2 + [\deg f(x) - 2]$

$$\boxed{\deg(x^2+1)f''(x) = \deg f(x)}$$

De plus, $\operatorname{codom}(x^2+1)f''(x)$
$= \operatorname{codom}(x^2+1) \times \operatorname{codom}(f''(x))$
$= 1 \times n(n-1)\operatorname{codom}(f(x))$

Alors, $\operatorname{codom}(x^2+1)f''(x) - 2\operatorname{codom}(f(x))$
$= [n(n-1) - 2]\operatorname{codom}(f(x))$
$= \underbrace{(n-2)(n+1)}_{\neq 0}\ \underbrace{\operatorname{codom}(f(x))}_{\neq 0 \text{ par déf d'un codom.}}$

Par conséquent,

si $n > 2$ alors $\deg[(x^2+1)f''(x) - 2f(x)] = \deg f(x) \neq 1$ donc f n'est pas sol° de (E)

si $n = 2$ alors $\deg[(x^2+1)f'' - 2f] < \deg f$. donc il est encore possible que f soit solution...

Ainsi $\boxed{f \text{ polynomiale et solution de } (E) \Rightarrow \deg f \leq 2 \ldots}$

COURS

- $P = Q \Rightarrow \deg P = \deg Q$
- $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$
- $\deg P'' = \begin{cases} \deg P - 2 & \text{si } \deg P \geq 2 \\ -\infty & \text{si } \deg P \leq 1. \end{cases}$
- Si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$ alors $\operatorname{codom}(PQ) = \operatorname{codom} P \times \operatorname{codom} Q$
- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$

Si $\begin{cases} \deg P = \deg Q \\ \operatorname{codom} P + \operatorname{codom} Q \neq 0 \end{cases}$ alors $\deg P+Q = \deg P$

Si $\deg P = \deg Q$ $\operatorname{codom} P + \operatorname{codom} Q = 0$ alors $\deg(P+Q) < \deg P$

Je prends $n \geq 2$ pour pouvoir appliquer la formule de $\deg P''$ plus simplement (1 seul cas...)

Cherchons parmi les fonctions polynomiales de degré inf à 2 celles qui sont solutions.

Soit $f : (x \to ax^2+bx+c)$ tq a, b, c ctes.

Alors f sol de (E)

$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (x^2+1)(2a) - 2(ax^2+bx+c) = -x$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}, -2b\cdot x - 2c + 2a = -x$

$\iff \begin{cases} -2b = -1 \\ 2a - 2c = 0 \end{cases}$ par unicité des coef d'une fonction polynomiale.

$\iff \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = c \end{cases}$

Ainsi, les solutions polynomiales de (E) sont toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto ax^2 + \frac{1}{2}x + a)$ tq a cste réelle.

2) Comme $(x \to \frac{1}{2}x)$ est une SP de (E), toute fonction de la forme $(x \to ax^2 + a)$ sont solutions de (EH).

En particulier $(x \to x^2+1)$ est une sol° de (EH). Cherchons les autres sol° de (E) sous la forme $f(x) = k(x)(x^2+1)$ tq k deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. (*)

Alors f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = k'(x)(x^2+1) + 2xk(x)$

et $f''(x) = k''(x)(x^2+1) + 4xk'(x) + 2k(x)$

Par conséquent,

f sol° de (E) $\iff \forall x \in \mathbb{R}, (x^2+1)f''(x) - 2f(x) = -x$

• Si f et g polynomiales telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$ (ie $f = g$) alors f et g ont les mêmes coefficients.

• $P = Q \iff P$ et Q ont les même coef.

f sol° de (E) $\iff \forall x \in \mathbb{R}$,

$(x^2+1)k''(x)(x^2+1) + 4x(x^2+1)k'(x) + 2(x^2+1)k(x) - 2k(x)(x^2+1) = -x$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}$,

$(x^2+1)^2 k''(x) + 4x(x^2+1)k'(x) = -x$

f sol° de (E) $\iff k'$ est sol° de l'edl 1 :

$$y'' + \frac{4x}{x^2+1}y' = -\frac{x}{(x^2+1)^2}. \quad (E_2)$$

Résolvons (E_2) :

• $a(x) = \frac{4x}{x^2+1} = 2 \times \frac{2x}{x^2+1}$

$A : (x \mapsto 2\ln(x^2+1))$ est une primitive de a sur $\mathbb{R}$ et $e^{-A(x)} = \frac{1}{(x^2+1)^2}$. Donc les sol° de (EH_2) sont toutes les fonctions de la forme $(x \to \frac{c}{(x^2+1)^2})$ tq k cste réelle.

• Cherchons une SP de la forme $f(x) = \frac{c(x)}{(x^2+1)^2}$ avec c dérivable sur $\mathbb{R}$. (MVC)

Alors f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x$,

$f'(x) = \frac{c'(x)}{(x^2+1)^2} - 4x\frac{c(x)}{(x^2+1)^3}$.

(*) On trouvera ttes les sol° car tte fonction s'écrit sous cette forme car $x^2+1 \neq 0$

Donc f sol° de (E_2)

$\iff \forall x\in\mathbb{R},\ \dfrac{c'(x)}{(x^2+1)^2}-\dfrac{4xc(x)}{(x^2+1)^3}+\dfrac{4x}{1+x^2}\dfrac{c(x)}{(1+x^2)^2}=-\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$

$\iff \forall x\in\mathbb{R},\ c'(x)=-x$

Prenons $c_0:\left(x\to-\frac{x^2}{2}\right)$ et

$f_0:\left(x\to\dfrac{-x^2}{2(x^2+1)^2}\right)$ est une SP de E_2.

Ainsi les sol° de (E_2) sont ttes les fonctions de la forme :

$\left(x\to\dfrac{c}{(1+x^2)^2}-\dfrac{x^2}{2(1+x^2)^2}\right)$ tq c cste réelle.

Retour à (E). Alors,

- $f:(x\to k(x)(x^2+1))$ sol° de (E)

$\iff$ il existe c cste réelle tq $\forall x\in\mathbb{R}$,

$k'(x)=\dfrac{2c-x^2}{2(1+x^2)^2}=\left(\dfrac{2c+1}{2}\right)\dfrac{1}{(1+x^2)^2}-\dfrac{(1+x^2)}{2(1+x^2)^2}$

$k'(x)=\left(\dfrac{2c+1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^2-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

int ??

on sait intégrer, int Arctan x

- Cherchons une primitive de $\left(x\overset{g}{\to}\dfrac{1}{(1+x^2)^2}\right)$

g est continue sur $\mathbb{R}$ donc $G:\left(x\to\int_0^x\frac{1}{(1+t^2)^2}dt\right)$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

$G(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{(1+t^2)^2}dt=\int_0^x\frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2}dt$

ASTUCE

$=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}-\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$

ASTUCE

$G(x)=\mathrm{Arctan}(x)-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \underbrace{t}_{u(t)}\ \overbrace{\frac{2t}{(1+t^2)^2}}^{v'(t)}dt$ IPP

$=\mathrm{Arctan}\,x-\dfrac{1}{2}\left[\underbrace{t}_{u(t)}\underbrace{\left[\dfrac{-1}{1+t^2}\right]}_{v(t)}\right]_0^x+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x 1\times\frac{(-1)}{1+t^2}dt$

$=\mathrm{Arctan}\,x+\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}\,x$

$G(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}\,x+\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{1+x^2}$.

- Ainsi

$f:(x\to k(x)(1+x^2))$ est sol° de (E)

$\iff$ il existe c et d cstes réelles tq

$k(x)=\left(c+\dfrac{1}{2}\right)\left[\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}\,x+\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{1+x^2}\right]-\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}\,x+d$.

$\iff$ il existe c et d cstes réelles tq

$f(x)=\left(\dfrac{2c-1}{4}\right)(x^2+1)\,\mathrm{Arctan}\,x+\left(\dfrac{2c+1}{4}\right)x+d(x^2+1)$

CCL : Les solutions de (E) sont ttes les fonctions de la forme :

$\left(x\longmapsto\dfrac{c}{2}\left[(x^2+1)\mathrm{Arctan}\,x+x\right]+d(x^2+1)+\dfrac{1}{4}\left(x-(x^2+1)\mathrm{Arctan}\,x\right)\right)$

tq c et d cstes réelles

NB : en prenant $c=\frac{1}{2}$ et $d=0$, on retrouve la sol° $\left(x\to\frac{x}{2}\right)$.

en prenant $c=\frac{1}{2}$, on retrouve toutes nos sol° polynomiales.