Ex2

EX 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser les polynômes suivants en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

1. $P = X^8 + X^4 + 1$.
2. $P = (1-X^2)^3 + 8X^3$.
3. $P = X^6 + 1$
4. $P = X^n - R^n$ où R réel strictement positif
5. $P = X^{2n} - 2\cos(\theta)X^n + 1$ où $\theta \in]0,\pi[$ et $n \geq 1$.

1] $P(X) = X^8 + X^4 + 1$

$= (X^4)^2 + X^4 + 1$

$= (X^4 - j)(X^4 - j^2)$

méthode pour trouver la racine $n^{ième}$ d'un cpxe

Donc $\tilde{P}(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 = j$ ou $z^4 = j^2$

$\Leftrightarrow z$ est une racine $4^{ième}$ de j ou de j^2

Or, $j = e^{2i\pi/3}$ donc $e^{\frac{2i\pi}{12}}$ est une racine $4^{ième}$ de j et les racines $4^{ièmes}$ de j sont les cpxes : $e^{2i\pi/12} \times e^{\frac{2ik\pi}{4}}$ tq $k \in \{0,1,2,3\}$.

racines $n^{ièmes}$ de l'unité

ie $e^{i\frac{\pi}{6}} e^{\frac{ik\pi}{2}}$ tq $k \in \{0,1,2,3\}$.

De même $j^2 = e^{-2i\pi/3}$ donc $e^{-i\pi/6} \times e^{\frac{ik\pi}{2}}$ tq $k \in \{0,1,2,3\}$ sont les 4 racines $4^{ièmes}$ de j^2

Ainsi les racines complexes de P sont

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) = a_1 \\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)i = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}) = a_2 \\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)(-1) = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}-i) = a_3 \\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)(-i) = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}) = a_4 \\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i) = \overline{a_1} \\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)i = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) = \overline{a_4} \\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)(-1) = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i) = \overline{a_3} \\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)(-i) = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}) = \overline{a_2} \end{cases}$$

Ces huit complexes sont tous distincts et $\deg P = 8$. Donc ce sont les seules racines de P et elles sont toutes simples. Ainsi,

$$P = 1 \times (X-a_1)(X-\overline{a_1})(X-a_2)(X-\overline{a_2})(X-a_3)(X-\overline{a_3})(X-a_4)(X-\overline{a_4})$$

$$P = (X^2 - 2\mathrm{Re}(a_1)X + |a_1|^2)(X^2 - 2\mathrm{Re}(a_2)X + |a_2|^2)(X^2 - 2\mathrm{Re}(a_3)X + |a_3|^2)(X^2 - 2\mathrm{Re}(a_4)X + |a_4|^2)$$

$$\boxed{P = (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - X + 1)}$$

2] $P = (1-X^2)^3 + 8X^3$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. $\tilde{P}(0) \neq 0$ donc prenons $z \neq 0$.

$\tilde{P}(z) = 0 \Leftrightarrow (1-z^2)^3 = (-2z)^3$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1-z^2}{-2z}\right)^3 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1-z^2}{-2z}$ est une racine $3^{ième}$ de l'unité

$\Leftrightarrow \frac{1-z^2}{-2z} = 1$ ou $\frac{1-z^2}{-2z} = j$ ou $\frac{1-z^2}{-2z} = j^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -z^2 + 2z + 1 = 0 & (1) \\ \text{ou} \\ z^2 - 2jz - 1 = 0 & (2) \\ \text{ou} \\ -z^2 + 2j^2 z + 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

(1)

Or, ① $\Leftrightarrow z = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{-2} = 1+\sqrt{2} = a_1$

ou

$z = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{-2} = 1-\sqrt{2} = a_2$ ①

$$\Delta_{②} = 4j^2+4 = 4(j^2+1) = 4(-j)$$
$$= 2^2 i^2 \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^2$$
$$= \left(2i e^{i\pi/3}\right)^2$$
$$= \left(2i\tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\right)^2$$
$$\Delta_{②} = \left(-\sqrt{3}+i\right)^2$$

Donc ② $\Leftrightarrow z = \dfrac{2j-\sqrt{3}+i}{2}$
$$= \frac{-1+i\sqrt{3}-\sqrt{3}+i}{2}$$
$$= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(-1+i) = a_3$$

ou $z = \dfrac{2j+\sqrt{3}-i}{2}$
$$= \frac{-1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}-i}{2}$$
$$= \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)(-1-i) = a_4$$ ②

Enfin z sol° ② $\Leftrightarrow z^2 - 2jz - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \bar{z}^2 - 2\bar{j}\,\bar{z} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \bar{z}$ sol° de ③.

car $\boxed{\bar{j} = j^2}$

Donc $\overline{a_3}$ et $\overline{a_1}$ sont les sol° de ③. ③

On a trouvé 6 racines distinctes pour P. Or, $\deg P = 6$. Ainsi,

②

Toutes ces racines sont simples et

$$P = (-1)^3 (X-a_1)(X-a_2)(X-a_3)(X-\overline{a_3})(X-a_4)(X-\overline{a_4})$$

$$P = -\left(X-(1+\sqrt{2})\right)\left(X-(1-\sqrt{2})\right)\left(X^2-2\operatorname{Re}(a_3)X+|a_3|^2\right)\left(X^2-2\operatorname{Re}(a_4)X+|a_4|^2\right).$$

$$\boxed{P = -\left(X-(1+\sqrt{2})\right)\left(X-(1-\sqrt{2})\right)\left(X^2+(1+\sqrt{3})X+2+\sqrt{3}\right)\left(X^2+(1-\sqrt{3})X+2-\sqrt{3}\right).}$$

$|a_3| = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+1} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$|a_3|^2 = \frac{1}{2}(1+3+2\sqrt{3}) = 2+\sqrt{3}$

$|a_4| = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+1} = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$|a_4|^2 = \frac{1}{2}(4-2\sqrt{3}) = 2-\sqrt{3}$

détails

$\boxed{3}$ Soit $P = X^6+1$ et $z \in \mathbb{C}$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z^6 = -1 = e^{i\pi}$

$\Leftrightarrow z$ est une racine 6ième de -1

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0;5]\!] /$

$z = e^{i\pi/6} e^{2ik\pi/6}$

une racine 6ième de $e^{i\pi}$

les racines 6ièmes de l'unité

On a trouvé 6 racines distinctes de P et $\deg P = 6$. Donc, ces racines sont simples et

$$P = \prod_{k=0}^{5}\Big(X - \underbrace{e^{i\pi/6} e^{\frac{2ik\pi}{6}}}_{z_k}\Big)$$

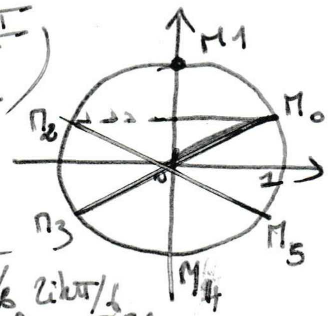


Illustration des racines... M_k est le point d'affixe $e^{i\pi/6}e^{2ik\pi/6} = z_k$

$z_0 = e^{i\pi/6} = \overline{z_5}$, $z_1 = i = \overline{z_4}$, $z_2 = e^{5i\pi/6} = \overline{z_3}$

Donc

$$P = 1\left(X^2 - 2\mathrm{Re}(z_0)X + |z_0|^2\right)\left(X^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)X + |z_1|^2\right)\left(X^2 - 2\mathrm{Re}(z_2)X + |z_2|^2\right)$$

Ainsi,

$$\boxed{P = \left(X^2 - \sqrt{3}X + 1\right)\left(X^2 + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{3}X + 1\right)}$$

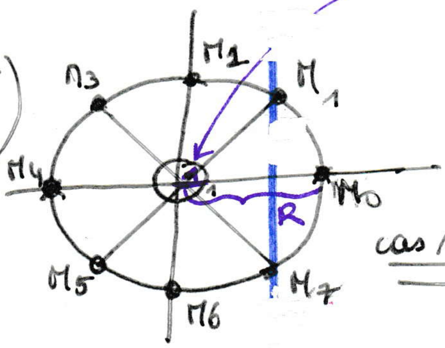
4] $P = X^n - R^n$

Cf exemple $X^n - 1$ dans le cours.

$$= R^n\left(\left(\frac{X}{R}\right)^n - 1\right)$$

$$P = R^n\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{X}{R} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right)$$

$$P = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \underbrace{Re^{\frac{2ik\pi}{n}}}_{z_k}\right)$$



1er cas n pair : R et $-R$ sont les racines réelles

$$P = (X-R)(X+R)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(X - Re^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(X - Re^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

$$P = (X-R)(X+R)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(X^2 - 2R\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + R^2\right)$$

2ème cas n impair : R est l'unique racine réelle

$$P = (X-R)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X - Re^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(X - Re^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

$$P = (X-R)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X^2 - 2R\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + R^2\right)$$

5] $P = X^{2n} - 2\cos\theta X^n + 1$ tq $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in [0, \pi]$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $Z = z^n$.

$$\tilde{P}(z) = 0 \iff z^{2n} - 2\cos\theta\, z^n + 1 = 0$$

$$\iff (z^n)^2 - 2\cos\theta (z^n) + 1 = 0$$

$$\iff Z^2 - 2\cos\theta\, Z + 1 = 0$$

$$\iff \left(Z - e^{i\theta}\right)\left(Z - e^{-i\theta}\right) = 0$$

$$\iff Z = e^{i\theta} \text{ ou } Z = e^{-i\theta}$$

$$\iff z^n = e^{i\theta} \text{ ou } z^n = e^{-i\theta}$$

$\iff z$ est une racine n-ième de $e^{i\theta}$ ou de $e^{-i\theta}$.

1er cas $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$ ie $e^{i\theta} \neq \pm 1$ ie $\theta \in]0, \pi[$

Alors $\tilde{P}(z) = 0 \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!]$ /

$$z = e^{i\theta/n} e^{2ik\pi/n} = z_k$$

ou

$$z = e^{-i\theta/n} e^{-\frac{2ik\pi}{n}} = \overline{z_k}$$

une racine n-ième particulière de $e^{i\theta}$

les racines n-ièmes de l'unité

Les complexes z_k tq $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont les racines n-ièmes de $e^{i\theta}$ donc sont tous distincts et les $\overline{z_k}$ sont tous distincts. De plus $(z_k)^n = e^{i\theta} \neq e^{-i\theta} = (\overline{z_\ell})^n$ donc les z_k et les $\overline{z_\ell}$ sont tous distincts. On a donc trouvé $2n$ racines de P. Or, $\deg P = 2n$. Donc ses racines sont simples et

$$P = 1 \times \prod_{k=0}^{n-1}(X - z_k)(X - \overline{z_k})$$

$$P = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 - 2\mathrm{Re}(z_k)X + |z_k|^2\right)$$

$$\boxed{P = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)X + 1\right)}$$

$2^{\text{ème}}$ cas $\theta = 0$. Alors $e^{i\theta} = e^{-i\theta} = 1$ et

$P = X^{2n} - 2X^n + 1$

cf exemple du cours....

$P = (X^n - 1)^2$

$$P = \left[\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right]^2$$

$$P = \begin{cases} (X-1)^2 \left[\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right)\right]^2 & \text{si } n \text{ impair} \\ (X-1)^2(X+1)^2 \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right)^2 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

$3^{\text{ème}}$ cas $\theta = \pi$. Alors $e^{i\theta} = e^{-i\theta} = -1$ et

$P = X^{2n} + 2X^n + 1 = (X^n + 1)^2$

$$P = \left[\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{i\pi}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right]^2$$

$$P = \begin{cases} (X+1)^2 \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)X + 1\right)^2 & \text{si } n \text{ impair} \\ \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{n}\right)X + 1\right)^2 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

-1 est alors l'unique racine réelle qd n impair...

pas de racine réelle qd n pair.