

Ex 3

Déterminer le reste de la division euclidienne d'un polynôme P de $K[X]$ quelconque par $B = (X-a)(X-b)$ avec a et b deux scalaires.

Soit $(a, b) \in K^2$, $P \in K[X]$ et

$$B = (X-a)(X-b) \neq 0$$

• Alors, il existe un unique Q et un unique R tels que: $P = BQ + R$.

et $\deg R < \deg B = 2$. Donc,
 $\deg R \leq 1$ i.e. $R = uX + v$ avec u et v scalaires.

• Par conséquent,

$$P(X) = (X-a)(X-b)Q(X) + uX + v$$

$$\text{et } \forall t \in K, \tilde{P}(t) = (t-a)(t-b)\tilde{Q}(t) + ut + v.$$

En particulier, pour $t = a$ et $t = b$,

$$\text{on a: } \begin{cases} \tilde{P}(a) = ua + v & (l_1) \\ \tilde{P}(b) = ub + v & (l_2) \end{cases}$$

1^{re} cas $a \neq b$. Alors (l_1) et (l_2) sont deux équations distinctes d'où l'on peut extraire u et v .

$$(l_1) - (l_2) \text{ donne: } (a-b)u = \tilde{P}(a) - \tilde{P}(b)$$

$$\text{donc } u = \frac{\tilde{P}(a) - \tilde{P}(b)}{a-b} \quad (\text{car } a-b \neq 0)$$

$$\text{et } b(l_1) - a(l_2) \text{ donne } (b-a)v = b\tilde{P}(a) - a\tilde{P}(b)$$

$$\text{donc } v = \frac{b\tilde{P}(a) - a\tilde{P}(b)}{b-a} \quad (\text{car } a-b \neq 0)$$

$$\text{Ainsi } R(X) = \left(\frac{\tilde{P}(a) - \tilde{P}(b)}{a-b} \right) X + \left(\frac{a\tilde{P}(b) - b\tilde{P}(a)}{a-b} \right)$$

2^{ème} cas $a = b$. Alors (l_1) et (l_2) sont une même relation. Il faut donc trouver une deuxième relation.

$$\text{On a: } P(X) = \underbrace{(X-a)^2}_{T(X)} Q(X) + uX + v$$

Comme $(X-a)^2$ divise T , T admet a comme racine au moins double, cela implique que $\tilde{T}(a) = \tilde{T}'(a) = 0$.

$$\text{Or, } P(X) = T(X) + R(X)$$

$$\text{donc } P'(X) = T'(X) + R'(X)$$

et $\forall t \in K, \tilde{P}'(t) = \tilde{T}'(t) + \tilde{R}'(t)$. En particulier pour $t = a$, $\tilde{P}'(a) = \tilde{R}'(a) = u$.

$$\text{Ainsi } \begin{cases} u = \tilde{P}'(a) \\ \tilde{P}(a) = ua + v \end{cases}$$

$$\text{Donc } v = \tilde{P}(a) - \tilde{P}'(a)a.$$

$$\text{et } R(X) = \tilde{P}'(a)X + (\tilde{P}(a) - \tilde{P}'(a)a).$$

N.B. Si $a \neq b$ alors on utilise ces 2 racines distinctes de B pour obtenir deux relations vérifiées par u et v .

Si $a = b$ alors on utilise la racine a de B et sa multiplicité 2 dans B pour obtenir 2 relations vérifiées par u et v .

Cf exemples du cours = 60 et 66.