Ex3

EX 3 Factoriser les polynômes suivants en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

1. $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.
2. $P = X^7 - 5X^6 + 8X^5 - 4X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 5X + 1$

1] $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $Z = z^2$ et $\omega = Z + \frac{1}{Z}$.

$\tilde{P}(z) = 0 \Leftrightarrow Z^4 + 2Z^3 + 3Z^2 + 2Z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow Z^2\left[Z^2 + \frac{1}{Z^2} + 2\left(Z + \frac{1}{Z}\right) + 3\right] = 0$

$\Leftrightarrow \omega^2 - 2 + 2\omega + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (\omega + 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \omega = -1$

$\Leftrightarrow Z + \frac{1}{Z} = -1$

polynômes réciproques

$\Leftrightarrow Z^2 + Z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow Z = j$ ou $Z = j^2$

$\Leftrightarrow z^2 = j$ ou $z^2 = j^2$

$\Leftrightarrow z = \pm e^{i\pi/3}$ ou $z = \pm j$.

J'ai donc trouvé 4 racines distinctes de P.

Or, deg P = 8. Comme ce sont les seules racines de P, elles sont multiples.

De plus, j et $\bar{j} = -e^{i\pi/3}$ ont la même multiplicité m dans P car P est à coef réels. De même, $-j$ et $-\bar{j} = e^{i\pi/3}$ ont la même multiplicité q dans P. Enfin $2m + 2q = 8$

ie $m + q = 4$.

Donc ou bien $m = q = 2$ ou bien $m = 1$ et $q = 3$.

ou bien $m = 3$ et $q = 1$

Ou bien $P(X) \overset{①}{=} \left[(X-j)(X-\bar{j})\right]^2 \left[(X+j)(X+\bar{j})\right]^2$

ou bien $P(X) \overset{②}{=} \left[(X-j)(X-\bar{j})\right]^3 (X+j)(X+\bar{j})$

ou bien $P(X) \overset{③}{=} (X-j)(X-\bar{j}) \left[(X+j)(X+\bar{j})\right]^3$

Mais P est pair ie $P(-X) = P(X)$. Donc nécessairement seule ① convient et

$$\boxed{\begin{gathered} P(X) = \left[(X-j)(X-\bar{j})\right]^2 \left[(X+j)(X+\bar{j})\right]^2 \\ P(X) = (X^2+X+1)^2 (X^2-X+1)^2. \end{gathered}}$$

NB j'aurais pu calculer $\tilde{P}'(j)$ et $\tilde{P}'(-j)$ et trouver que $\tilde{P}'(j) = \tilde{P}'(-j) = 0$. J'en déduis que j et $-j$ sont racines au moins double de P ... et alors $\bar{j}$ et $-\bar{j}$ le sont aussi ce qui fait 8 racines de P et le compte est bon ! et la multiplicité de chacune est exactement 2.

1

2] $P(X) = X^7 - 5X^6 + 8X^5 - 4X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 5X + 1$

- Cherchons des racines évidentes de P.

$\tilde{P}(1) = 2 - 10 + 16 - 8 = 0$

et $\tilde{P}(-1) = -1 - 5 - 8 - 4 + 4 + 8 + 5 + 1 = 0$

Donc 1 et -1 sont racines de P.

Cherchons la multiplicité de chacune de ces racines dans P.

- $P'(X) = 7X^6 - 30X^5 + 40X^4 - 16X^3 - 12X^2 + 16X \boxed{-5}$

donc

$\tilde{P}'(1) = 7 - 30 + 40 - 16 - 12 + 16 - 5 = 0$

$\tilde{P}'(-1) = 7 + 30 + 40 + 16 - 12 - 16 - 5 \neq 0$.

donc -1 est racine simple de P et 1 racine au moins double de P.

- $P''(X) = 42X^5 - 150X^4 + 160X^3 - 48X^2 - 24X \boxed{+16}$

donc

$\tilde{P}''(1) = 42 - 150 + 160 - 48 - 24 + 16 \neq 0$

Ainsi 1 est racine double de P.

Ainsi, $\boxed{(X-1)^2(X+1) \text{ divise } P}$.

- Cherchons le quotient en posant la division :

$B = (X^2 - 2X + 1)(X+1)$
$= X^3 - X^2 - X + 1$

$$\begin{array}{l|l}
X^7 - 5X^6 + 8X^5 - 4X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 5X + 1 & X^3 - X^2 - X + 1 \\
\hline
X^7 - X^6 - X^5 + X^4 & X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 4X + 1 \\
-4X^6 + 9X^5 - 5X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 5X + 1 & \\
-4X^6 + 4X^5 + 4X^4 - 4X^3 & \\
5X^5 - 9X^4 + 8X^2 - 5X + 1 & \\
5X^5 - 5X^4 - 5X^3 + 5X^2 & \\
-4X^4 + 5X^3 + 3X^2 - 5X + 1 & \\
-4X^4 + 4X^3 + 4X^2 - 4X & \\
X^3 - X^2 - X + 1 & \\
X^3 - X^2 - X + 1 & \\
0 &
\end{array}$$

Ainsi, $\boxed{P(X) = (X-1)^2(X+1)(X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 4X + 1)}$

Soit $Q(X) = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 4X + 1$.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $w = z + \frac{1}{z}$.

$\tilde{Q}(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow z^2\left[z^2 - 4z + 5 - \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2}\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 - 4\left(z + \frac{1}{z}\right) + 5 = 0$

$\Leftrightarrow w^2 - 4w + 3 = 0$

$\Leftrightarrow w = 1$ ou $w_2 = 3$

$\Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 1$ ou $z + \frac{1}{z} = 3$

$\Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$ ou $z^2 - 3z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow z = -j$ ou $z = -j^2$ ou $z = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ou $z = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Ainsi $Q(X) = (X+j)(X+\bar{j})\left(X-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

$$Q(X) = (X^2-X+1)\left(X-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

et

$$\boxed{P(X) = (X-1)^2(X+1)(X^2-X+1)\left(X-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$$