Ex3

Ex 3 Degré et unicité des coefficients

Soit $f(P) = (X^2+X)P''(X) + (2X+1)P'(X)$.

1) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$ *et* tel qu'il existe λ un réel vérifiant $f(P) = \lambda P$.
   On note $d = \deg(P)$ *et* $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ tq $a_d \neq 0$.
   a) Démontrer que : $\lambda = d(d+1)$ *et* $\forall k \in \{0,1,\dots,d-1\}, a_{k+1} = \frac{(d-k)(d+k+1)}{(k+1)^2} a_k$.
   b) En déduire que : $\forall k \in \{0,1,\dots,d\}, , a_{\cancel{k}} = \frac{(d+k)!}{(d-k)!(k!)^2} a_0$.
   c) Démontrer qu'il existe un seul polynôme Q_d unitaire (ie. $codom(Q_d) = 1$) tel que : $f(Q_d) = d(d+1)Q_d$.

1) On doit trouver ici que si P est un polynôme à coef réels de degré inf à n alors f(P) est aussi à coef réels de degré inf à n.

$\mathbb{R}_n[X]$ = ensemble des polynômes à coef réels et de degré inf ou égal à n

i.e $P \in \mathbb{R}_n[X] \Leftrightarrow \begin{cases} \text{coef de P réels} \\ \deg P \leq n. \end{cases}$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

- Alors P'' et P' sont à coef réels donc f(P) est un polynôme à coef réels (comme produit et somme de polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

$\deg P^{(j)} = \begin{cases} \deg P - j & \text{si } \deg P \geq j \\ -\infty & \text{si } \deg P < j \end{cases}$

- De plus,
  - $\deg P'' = \begin{cases} \deg P - 2 & \text{si } \deg P \geq 2 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

donc $\deg (X^2+X)P'' = \deg(X^2+X) + \deg P''$

$= \underbrace{\begin{cases} \deg P & \text{si } \deg P \geq 2 \\ -\infty & \text{si } \deg P < 2 \end{cases}}_{\leq \deg P}$

$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$

$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$

  - $\deg P' = \begin{cases} \deg P - 1 & \text{si } \deg P \geq 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

donc $\deg (2X+1)P' = \deg(2X+1) + \deg P'$

$= 1 + \deg P'$

$= \underbrace{\begin{cases} \deg P & \text{si } \deg P \geq 1 \\ -\infty & \text{si } \deg P < 1 \end{cases}}_{\leq \deg P}$

Or, $\deg(f(P)) \leq \max(\underbrace{\deg (X^2+X)P''}_{\leq \deg P}, \underbrace{\deg (2X+1)P'}_{\leq \deg P})$

Donc, $\boxed{\deg(f(P)) \leq \deg P \leq n}$.

Ainsi, $\boxed{f(P) \in \mathbb{R}_n[X]}$

1

2] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $P \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $f(P) = \lambda P$.

On note $d = \deg(P)$ et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.

a] • $\underline{1^{er} \text{ cas}}$ $d = 0$ alors $P' = P'' = 0$ et $f(P) = 0$

Alors $f(P) = \lambda P$ s'écrit $0 = \lambda \underbrace{a_d}_{\neq 0}$ ← $a_d = \text{codom}(P) \neq 0$ par déf du codom...

donc $\boxed{\lambda = 0 = d(d+1)}$

• $\underline{2^{eme} \text{ cas}}$ $d = 1$ alors $P = a_1 X + a_0$ tq $a_1 \neq 0$ et $P' = a_1$ et $P'' = 0$. Donc $f(P) = \lambda P$ s'écrit : $(2X+1)a_1 = \lambda(a_1 X + a_0)$.

Alors par unicité des coefficients, on a : ← unicité des coeff.

$$\begin{cases} 2a_1 = \lambda a_1 \\ a_1 = \lambda a_0 \end{cases} \text{ ie } \begin{cases} (2-\lambda)\underbrace{a_1}_{\neq 0} = 0 \\ a_1 = \lambda a_0 \end{cases}$$

donc $\lambda = 2$ et $a_1 = 2a_0$

Ainsi $\boxed{\lambda = \underbrace{1}_{=d} \times \underbrace{2}_{=d+1} \quad \text{et } a_1 = \frac{(1-0)(1+0+1)}{(0+1)^2} a_0 = \frac{(d-0)(d+0+1)}{(0+1)^2} a_0}$

• $\underline{3^{eme} \text{ cas}}$ $d \geq 2$. Alors

$$P' = \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1}$$

$$P'' = \sum_{k=2}^{d} k(k-1) a_k X^{k-2}$$

← expression de P' et P'' : Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d \geq 2$ alors $P' = \sum_{k=1}^{n} a_k k X^{k-1}$, $P'' = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2}$

Donc $f(P) = (X^2 + X)\left[\sum_{k=2}^{d} k(k-1) a_k X^{k-2}\right] + (2X+1) \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1}$

Donc,

$$f(P) = X^2 \sum_{k=2}^{d} k(k-1) a_k X^{k-2} + X \sum_{k=2}^{d} k(k-1) a_k X^{k-2} + 2X \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1}$$

$$= \sum_{k=2}^{d} k(k-1) a_k X^k + \sum_{k=2}^{d} k(k-1) a_k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{d} 2k a_k X^k + \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1}$$

← PASSAGE DÉLICAT...

réécriture des sommes

$$f(P) = \sum_{k=2}^{d} k(k-1)a_k X^k + \sum_{k=1}^{d-1} (k+1) k a_{k+1} X^k + \sum_{k=1}^{d} 2k a_k X^k + \sum_{k=0}^{d-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

$$f(P) = \left(\sum_{k=2}^{d-1} k(k-1)a_k X^k\right) + d(d-1)a_d X^d + \left(\sum_{k=2}^{d-1} (k+1)k a_{k+1} X^k\right) + 2a_2 X + \left(\sum_{k=2}^{d-1} 2k a_k X^k\right) + 2a_1 X + 2d a_d X^d + \left(\sum_{k=2}^{d-1} (k+1) a_{k+1} X^k\right) + a_1 + 2a_2 X.$$

$$f(P) = \left[\sum_{k=2}^{d-1} \left(\left[k(k-1) + 2k\right] a_k + \left[(k+1)k + (k+1)\right] a_{k+1}\right) X^k\right] + (d^2+d) a_d X^d + (2a_1 + 4a_2) X + a_1$$

et $\lambda P = \sum_{k=0}^{d} \lambda a_k X^k$

Or, $f(P) = \lambda P$. Donc par unicité des coefficients d'un polynôme,

← unicité des coef.

$$\begin{cases} \forall k \in [\![2, d-1]\!] \\ [k^2+k] a_k + [k+1]^2 a_{k+1} = \lambda a_k & (1) \\ (d^2+d) a_d = \lambda a_d & (2) \\ (2a_1 + 4a_2) = \lambda a_1 & (3) \\ a_1 = \lambda a_0. & (4) \end{cases}$$

Comme $a_d \neq 0$, (2) permet d'affirmer que $\boxed{\lambda = d + d^2}$.

(1) permet alors d'exprimer a_{k+1} en fonction de a_k pour $k \in [\![2, d-1]\!]$.

$$a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2}\left[\underbrace{(d+d^2)}_{=\lambda} - (k^2+k)\right] a_k$$

$$= \frac{1}{(k+1)^2}\left[(d-k) + (d^2-k^2)\right] a_k$$

Donc, $\forall k \in [\![2, d-1]\!]$,

$$\boxed{a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2}\left[(d-k)(1+d+k)\right] a_k}$$

OK.

Enfin on vérifie cette formule pour $k=0$ et $k=1$ avec (3) et (4)

$$a_2 = \frac{(\lambda-2)}{4} a_1 = \frac{(d^2+d-2)}{4} a_1$$

$$a_2 = \frac{(d-1)(d+1+1)}{2^2} a_1 \quad \text{OK}.$$

et $a_1 = d(d+1) a_0 = \frac{(d-0)(d+0+1)}{1^2} a_0$ ok

YES!

b) Montrons par récurrence finie sur k

que $\left[a_k = \frac{(d+k)!}{(d-k)!(k!)^2} a_0\right] = \mathcal{H}_k$

init $a_0 = \frac{d!}{d!\,0!^2} a_0$ OK.

propag Soit $k \in [\![0, d-1]\!]$ tq $\mathcal{H}_k$ vrai.

Alors $a_{k+1} = \frac{(d-k)(d+k+1)}{(k+1)^2} \times \frac{(d+k)!}{(d-k)!\,k!^2} a_0$

$$= \frac{(d-k)}{(d-k)!} \frac{(d+k+1)(d+k)!}{(k+1)^2(k!)^2} a_0$$

$$= \frac{1}{(d-k-1)!} \frac{(d+k+1)!}{((k+1)!)^2} a_0$$

$$= \frac{1}{(d-(k+1))!} \frac{(d+(k+1))!}{((k+1)!)^2} a_0.$$

OK.

Donc $(\mathcal{H}_k \Rightarrow \mathcal{H}_{k+1})$ pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$.

CCL : $\boxed{\forall k \in [\![0, d]\!], \mathcal{H}_k \text{ vraie}}$

c) On a montré que si $P \in \mathbb{R}[X]$ tq

$P \neq 0$ et $f(P) = \lambda P$ alors

tq $\boxed{P = \sum_{k=0}^{d} \left[\frac{(d+k)!}{(d-k)!(k!)^2} a_0\right] X^k \text{ et } a_0 \in \mathbb{R}^* \xleftarrow{\text{car } P \neq 0}}$ (*) où $d = \deg P \in \mathbb{N}$

et $\lambda = d(d+1)$.

On aurait pu montrer la réciproque en raisonnant par équivalence ... ce qui

assurait qu'un tel polynôme (*) vérifie bien $f(P) = d(d+1)P$ et $P \neq 0$..

Cherchons parmi ces polynômes ceux qui sont unitaires ie ceux qui vérifient $a_d = 1$.

• Tout d'abord, dès que l'on donne une valeur à a_0, le polynôme P vérifiant (*) est entièrement connu ... et unique.

• De plus, $a_d = \frac{(2d)!}{0!(d!)^2} a_0$.

• Donc $a_d = 1 \iff \frac{(2d)!}{(d)!^2} a_0 = 1$

$$\iff \binom{2d}{d} a_0 = 1$$

$$\iff a_0 = \frac{1}{\binom{2d}{d}}$$

Ainsi, seul le polynôme Q_d défini par

$$Q_d = \sum_{k=0}^{d} \frac{(d+k)!}{(d-k)!(k!)^2} \frac{1}{\binom{2d}{d}} X^k$$

vérifie : Q_d unitaire

et $f(Q_d) = d(d+1)Q_d$.