Ex 3 bis Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P = (\cos(\theta) X + \sin(\theta))^n$ par $B = X^2 + 1$.

Les polynômes P et B sont à coef réels.

Cherchons le reste de la division euclidienne de P par B.

- Je sais qu'il existe deux uniques polynômes Q et R dans $\mathbb{R}[X]$ tq : $\begin{cases} P = BQ + R \\ \text{et} \\ \deg R < \deg B = 2. \end{cases}$

Alors $\deg R \leq 1$ ie $R = aX + b$ avec a et b cstes réelles.

- Alors $(\cos\theta\, X + \sin\theta)^n = \overbrace{(X^2+1)Q(X)}^{T(X)} + aX + b$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $(\cos\theta\, z + \sin\theta)^n = \underbrace{(z^2+1)\tilde{Q}(z)}_{\tilde{T}(z)} + az + b$.

En particulier pour $z = i$ on obtient

$$(\cos\theta\, i + \sin\theta)^n = \underbrace{(i^2+1)}_{=0}\tilde{Q}(i) + ai + b$$

Ainsi, $\boxed{ai + b = (\cos\theta\, i + \sin\theta)^n}$ (*)

- Déterminons la forme algébrique de $(\cos\theta\, i + \sin\theta)^n$.

$$(\cos\theta\, i + \sin\theta)^n = \left[i(\cos\theta - i\sin\theta)\right]^n$$
$$= \left[e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-i\theta}\right]^n$$
$$= \left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right]^n$$
$$= e^{in\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$
$$= \cos\left(n\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right) + i\sin\left(n\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$

Ainsi

$$\underbrace{b}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{a}_{\in\mathbb{R}} i = \underbrace{\cos\left(n\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\sin\left(n\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right)}_{\in\mathbb{R}}$$

Donc par unicité des parties réelle et imaginaire d'un cpxe, on a :

$$\boxed{a = \sin\left(n\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right) \text{ et } b = \cos\left(n\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right)}.$$

Ainsi, $\boxed{R(X) = \sin\left(n\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right)X + \cos\left(n\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right)}$

NB :

- La division euclidienne se fait dans $\mathbb{R}[X]$ si A et B sont dans $\mathbb{R}[X]$ alors le quotient Q et le reste R de la division euclidienne sont aussi dans $\mathbb{R}[X]$
- Par contre, même si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\tilde{P}$ peut être défini sur $\mathbb{C}$ .... et on peut calculer $\tilde{P}(z)$ avec $z \in \mathbb{C}$ car $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.
- Je choisis de prendre $z = i$ pour faire disparaître le terme $\tilde{T}(z)$ qui contient $\tilde{Q}$ que je ne connais pas. Pour faire "disparaître" $\tilde{T}(z)$, je choisis d'attribuer à z la valeur d'une racine de T... ici i est racine de T.
- Dans les autres exercices, on a utilisé les 2 racines de T (ici i et $-i$) pour obtenir deux relations vérifiées par a et b. Ici c'est inutile car i est complexe et a et b sont réels. Donc l'égalité (*) permet à elle seule de trouver a et b.