Ex 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que 1 est racine de $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$ et déterminer son ordre de multiplicité. Factoriser P par $(X-1)^2$.

Soit $n \geq 4$.

$P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$.

- Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\tilde{P}(t) = t^{2n} - n t^{n+1} + n t^{n-1} - 1$.

et $\tilde{P}(1) = 1 - n + n - 1 = 0$.

Donc 1 est racine de P.

car $n \geq 4$ donc $2n \geq 0$, $n+1 \geq 0$, $n-1 \geq 0$

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $\tilde{P}'(t) = 2n t^{2n-1} - n(n+1) t^{n} + n(n-1) t^{n-2}$

car...

Donc $\tilde{P}'(1) = 2n - n^2 - n + n^2 - n = 0$

Donc 1 est racine au moins double de P

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $\tilde{P}''(t) = 2n(2n-1) t^{2n-2} - n^2(n+1) t^{n-1} + n(n-1)(n-2) t^{n-3}$

et $\tilde{P}''(1) = 4n^2 - 2n - n^3 - n^2 + n^3 - 3n^2 + 2n = 0$

Donc 1 est racine au moins triple de P

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $\tilde{P}'''(t) = 2n(2n-1)(2n-2) t^{2n-3} - n^2(n+1)(n-1) t^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3) t^{n-4}$

et $\tilde{P}'''(1) = 4n(n-1)(2n-1) - n^2(n+1)(n-1) + n(n-1)(n-2)(n-3)$

$= (n-1)\left[8n^2 - 4n - n^3 - n^2 + n^3 - 5n^2 + 6n\right]$

$\tilde{P}'''(1) = (n-1)(2n^2 + 2n)$

$= 2n(n-1)(n+1) \neq 0$ car $n \geq 4$

Donc 1 est racine de P d'ordre de multiplicité exactement 3 lorsque $n \geq 4$.

Ainsi $(X-1)^3$ divise P dès que $n \geq 4$.

Soit $n = 1$

Alors $P = X^2 - X^2 + 1 - 1 = 0$

Donc 1 est racine de 0 sans ordre de

multiplicité.

Soit $n = 2$

Alors $P = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$

$= (X^4 - 1) - 2(X^3 - X)$

$= (X^2 - 1)(X^2 + 1) - 2X(X^2 - 1)$

$= (X^2 - 1)\left[X^2 + 1 - 2X\right]$

$= (X-1)(X+1)(X-1)^2$

$= (X-1)^3(X+1)$

Donc 1 est racine de P d'ordre de multiplicité 3.

Soit $n = 3$

Alors $P = X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1$

$P = (X^2 - 1)^3 = (X-1)^3(X+1)^3$

Donc 1 est racine de P d'ordre de multiplicité 3.

Ainsi $\forall n \geq 2$, 1 est racine de P d'ordre de multiplicité 3.

et pour $n = 1$, 1 est racine de $P = 0$ sans ordre de multiplicité

NB : pour appliquer les formules de dérivation $x^k \xrightarrow{\text{dériv}} k x^{k-1}$ ... il faut que $k \geq 1$...

(car pour $k = 0$, x^{k-1} n'est pas défini sur tout $\mathbb{R}$).

Mais en fait pour $k = 0$, $x^0 = 1 \xrightarrow{\text{dériv}} 0 = 0 \times x^{\text{"}k-1\text{"}}$

Donc les résultats trouvés pour $n \geq 4$, restent vrai pour $n = 2$ et $n = 3$.... Mais pas pour $n = 1$ car dans ce cas, $P = 0$

À REGARDER ... PATIEMMENT !

Formule de Factorisation : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \ \forall (A,B) \in K[X]^2$.

$$X^m - 1 = (X-1)\left(\sum_{k=0}^{m-1} X^k\right)$$

$$A^m - B^m = (A-B)\left(\sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}\right)$$

Factorisons P par $(X-1)^2$

$$P = X^{2n} - 1 - n\left(X^{n+1} - X^{n-1}\right)$$

$$= (X-1)\left(\sum_{k=0}^{2n-1} X^k\right) - nX^{n-1}\left(X^2 - 1\right)$$

$$= (X-1)\left[\sum_{k=0}^{2n-1} X^k - nX^{n-1}(X+1)\right]$$

$$= (X-1)\left[\sum_{k=0}^{2n-1} X^k - nX^n - nX^{n-1}\right]$$

$$= (X-1)\left[\sum_{k=0}^{n-1} X^k - nX^{n-1} + \sum_{k=n}^{2n-1} X^k - nX^n\right]$$

$$= (X-1)\left[\sum_{k=0}^{n-2}\left(X^k - X^{n-1}\right) + \sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(X^k - X^n\right)\right]$$

$$= (X-1)\left[\sum_{k=0}^{n-2} X^k\left(1 - X^{n-1-k}\right) + \sum_{k=n+1}^{2n-1} X^n\left(X^{k-n} - 1\right)\right]$$

$$= (X-1)\left[\sum_{k=0}^{n-2} X^k\left((1-X)\sum_{j=0}^{n-k-2} X^j\right) + \sum_{k=n+1}^{2n-1} X^n (X-1)\left(\sum_{j=0}^{k-n-1} X^j\right)\right]$$

$$\boxed{P(X) = (X-1)^2 \underbrace{\left[\sum_{k=n+1}^{2n-1} X^n \left(\sum_{j=0}^{k-n-1} X^j\right) - \sum_{k=0}^{n-2} X^k \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} X^j\right)\right]}}$$

quotient de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$.

FIN de l'exercice.

Factorisons par $(X-1)^3$

$$P(X) = (X-1)^2\left[X^n\left(\sum_{k=n+1}^{2n-1}\sum_{j=0}^{k-n-1} X^j\right) - \sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-k-2} X^{k+j}\right]$$

$j \le k-n-1 \Leftrightarrow j+n+1 \le k$ $\qquad$ $\ell = k+j \Leftrightarrow j = k-\ell$

$$= (X-1)^2\left[X^n \sum_{j=0}^{n-2}\left(\sum_{k=j+n+1}^{2n-1} X^j\right) - \sum_{k=0}^{n-2}\left(\sum_{\ell=k}^{n-2} X^\ell\right)\right]$$

$$= (X-1)^2 \left[X^n \sum_{j=0}^{n-2} \big(2n-1-(j+n+1)+1\big) X^j - \sum_{\ell=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{\ell} X^{\ell} \right]$$

$$= (X-1)^2 \left[X^n \sum_{j=0}^{n-2} (n-j-1) X^j - \sum_{\ell=0}^{n-2} (\ell+1) X^{\ell} \right]$$

$k = n-j-1 \Leftrightarrow j = n-1-k$

$$= (X-1)^2 \left[X^n \sum_{k=1}^{n-1} k X^{n-1-k} - \sum_{\ell=0}^{n-2} (\ell+1) X^{\ell} \right]$$

$k = \ell + 1$

$$= (X-1)^2 \left[\sum_{k=1}^{n-1} k X^{2n-1-k} - \sum_{k=1}^{n-1} k X^{k-1} \right]$$

$$= (X-1)^2 \left[\sum_{k=1}^{n-1} k \left(X^{2n-1-k} - X^{k-1} \right) \right]$$

$$= (X-1)^2 \left[\sum_{k=1}^{n-1} k X^{k-1} \left(X^{2n-2k} - 1 \right) \right]$$

$$= (X-1)^2 \left[\sum_{k=1}^{n-1} k X^{k-1} \left((X^2)^{n-k} - 1 \right) \right]$$

pour aller plus loin ... (non demandé)

$$\boxed{P(X) = (X-1)^2 \left[\sum_{k=1}^{n-1} k X^{k-1} (X^2-1) \left(\sum_{p=0}^{n-k-1} (X^2)^p \right) \right] = (X-1)^3 \underbrace{(X+1) \left(\sum_{k=1}^{n-1} k X^{k-1} \left(\sum_{p=0}^{n-k-1} X^{2p} \right) \right)}_{\text{quotient de la division euclidienne de } P \text{ par } (X-1)^3.}}$$

$$P(X) = (X-1)^3 (X+1) \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-k-1} k X^{2p+k-1} \right)$$

Rque on a bien $\tilde{P}(-1) = 0$ ... donc le facteur $X+1$ est correct !