Ex4

EX 4 1) Calculer $I=\int_0^1 \frac{t^5}{t^4+3t^3+4t^2+3t+1}dt$ après avoir justifié son existence.

2) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+2)^2}$ après avoir justifié son existence.

1) Decomposons en éléments simples l'intégrande

Posons $F(t)=\frac{t^5}{t^4+3t^3+4t^2+3t+1}$

et $\begin{cases} A(t)=t^5 \\ B(t)=t^4+3t^3+4t^2+3t+1. \end{cases}$

Effectuons la division euclidienne de A par B.

$$\begin{array}{l|l} t^5 & t^4+3t^3+4t^2+3t+1 \\ \hline -(t^5+3t^4+4t^3+3t^2+t) & t-3 \\ -3t^4-4t^3-3t^2-t & \\ -(-3t^4-9t^3-12t^2-9t-3) & \\ 5t^3+9t^2+8t+3 = R(t) & \end{array}$$

Ainsi, $A(t)=(t-3)B(t)+5t^3+9t^2+8t+3$

Donc $\boxed{F(t)=t-3+\frac{5t^3+9t^2+8t+3}{B(t)}}$

Factorisons $B(t)$

$\tilde{B}(-1)=0$

$\tilde{B}'(-1)=4(-1)+9\times1+8(-1)+3=0$

$\tilde{B}''(-1)=12-18+8\neq0$

Donc $(t+1)^2$ divise $B(t)$ (mais pas $(t+1)^3$).

Cherchons le quotient:

$$\begin{array}{l|l} t^4+3t^3+4t^2+3t+1 & t^2+2t+1 \\ \hline -(t^4+2t^3+t^2) & t^2+t+1 \\ t^3+3t^2+3t+1 & \\ -(t^3+2t^2+t) & \\ t^2+2t+1 & \end{array}$$

Ainsi $\boxed{B(t)=(t+1)^2\,(t^2+t+1)}$ $\Delta<0$ donc irréductible dans $\mathbb{R}[t]$.

Cela permet d'affirmer que $\mathcal{D}_F=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et F est continue sur $[0,1]$ donc I existe bien.

Decomposons $G(t)=\frac{5t^3+9t^2+8t+3}{(t+1)^2(t^2+t+1)}$ "R(t)" en éléments simples.

. Tout d'abord $\begin{cases}\tilde{R}(-1)\neq0\\ \tilde{R}(j)\neq0\end{cases}$

Donc $R(t)$ et $B(t)$ n'ont aucun facteur irréductible en commun et $\frac{R}{B}$ est une fraction irréductible.

. Alors, il existe a,b,c,d cts réels tq $\forall t\in\mathbb{C}\setminus\{-1,j,\bar{j}\}$,

$$G(t)=\frac{R(t)}{(t+1)^2(t^2+t+1)}=\frac{a}{t+1}+\frac{b}{(t+1)^2}+\frac{ct+d}{t^2+t+1}$$

Alors $b=\lim_{t\to-1}(t+1)^2G(t)=\frac{R(-1)}{-1}=-1$

$cj+d=\lim_{"t\to j"}(t^2+t+1)G(t)=\frac{R(j)}{(j+1)^2}$

$=\frac{5j^3+9j^2+8j+3}{(-j^2)^2}$

$\boxed{\begin{array}{l}1+j+j^2=0\\ j^3=1\end{array}}$

$=\frac{5-9-9j+8j+3}{+j^4}$

$=\frac{-1-j}{j}=\frac{-j^2-j^3}{j^3}=-j^2-1=j$

Donc $-\frac{c}{2}+d+i\frac{\sqrt3}{2}c=-\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}$ donc $\begin{cases}c=1\\ d=0\end{cases}$

$$a+c=\lim_{t\to+\infty} tG(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{t\tilde{R}(t)}{(t+1)(t^2+t+1)}=5$$

Ainsi, donc $a=5-c=4$.

Ainsi

$$\boxed{G(t)=\frac{4}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{t}{t^2+t+1}}$$

Donc

$$\boxed{F(t)=(t-3)+\frac{4}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{t}{t^2+t+1}}$$

4 fonctions continues sur $[0,1]$

Donc, par linéarité de l'intégrale,

$$I=\left[\frac{t^2}{2}-3t+4\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}\right]_0^1+J$$

et $\boxed{J=\int_0^1\frac{t}{t^2+t+1}dt}$

$$\boxed{I=-3+4\ln 2+J.}$$

Or, $\frac{t}{t^2+t+1}=\frac{1}{2}\frac{2t+1}{t^2+t+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+t+1}$

Donc $J=\left[\frac{1}{2}\ln|t^2+t+1|\right]_0^1-\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1\frac{1}{t^2+t+1}dt}_{K}$

$$\boxed{J=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}K}$$

De plus, $t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

$$t^2+t+1=\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right]$$

Donc $K=\int_0^1\frac{1}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right]}dt$

CV
$u=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)$
$dt=\sqrt{3}/2\,du$
$t=0\Leftrightarrow u=\frac{1}{\sqrt{3}}$
$t=1\Leftrightarrow u=\sqrt{3}$

$$K=\frac{4}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{u^2+1}\frac{\sqrt{3}du}{2}$$

$$\boxed{K=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan} u\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right]=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$$

Ainsi,

$$\boxed{I=-3+4\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}}$$

$\boxed{2}$ Cf corrigé planche 1 colle 21.

méthode pour intégrer $\boxed{1}$ $\frac{N(t)}{D(t)}$ avec N et D polynomiales et $\begin{cases}\deg N=1,\\ \deg D=2\\ \Delta_D<0\end{cases}$

$\boxed{2}$ $\frac{1}{D(t)}$ avec D polynomiale et $\begin{cases}\deg D=2\\ \Delta_D<0\end{cases}$