

Ex 4

Ex 4 Formules Taylor

- Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que : $P(-1) = 1, P'(-1) = -2$ et $P''(-1) = 3$
- Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(3) = P'(3)$ et $P''(3)$

1] D'après Taylor, tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ s'écrit sous la forme

$$P = P(-1) + P'(-1)(X+1) + \frac{P''(-1)}{2!}(X+1)^2$$

Donc
$$\begin{cases} P(-1) = 1 \\ P'(-1) = -2 \\ P''(-1) = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow P = 1 - 2(X+1) + \frac{3}{2}(X+1)^2$$

Al: la solution est $1 - 2(X+1) + \frac{3}{2}(X+1)^2$.

2] Le polynôme nul est solution.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $m \in \mathbb{N}$ tq $m \geq \deg P$.

Alors la formule de Taylor assure

que $P = \sum_{k=0}^m a_k (X-3)^k$ avec $\forall k,$

$$a_k = \frac{P^{(k)}(3)}{k!}$$

Donc $P(3) = P'(3) + P''(3)$

$$\Leftrightarrow a_0 = a_1 + 2! a_2$$

$$\Leftrightarrow a_0 = a_1 + 2a_2$$

$$\Leftrightarrow P = a_1 + 2a_2 + a_1(X-3) + a_2(X-3)^2 + \dots + a_m(X-3)^m$$

Posol^o $\Leftrightarrow P = a_1 \underbrace{(X-2)}_{A_1} + a_2 \underbrace{(X^2-6X+11)}_{A_2} + a_3 \underbrace{(X-3)^3}_{A_3} + a_4 \underbrace{(X-3)^4}_{A_4} + \dots + a_m \underbrace{(X-3)^m}_{A_m}$

$\Rightarrow P$ est une combinaison linéaire de $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$.

Les solutions sont les combinaisons linéaires de A_1, A_2 et A_k tq $k \geq 3$.

ou

$$\begin{cases} A_1 = X-2 \\ A_2 = X^2-6X+11 \end{cases} \text{ et } \forall k \geq 3, A_k = (X-3)^k$$

COURS

Formule de Taylor pour les polynômes: Soit $\alpha \in K$; tout polynôme P s'écrit manière unique sous la forme $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k (X-\alpha)^k$

où $m \in \mathbb{N}$ tq $m \geq \deg P$
 $a_0, \dots, a_m$ scalaires et
 de plus, $\forall k, a_k = \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}$

• Une combinaison linéaire des polynômes $A_1, A_2, \dots, A_m$ est un polynôme de la forme

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \dots + \beta_m A_m \text{ tq } \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \text{ scalaires.}$$

• Une combinaison linéaire des polynômes $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un polynôme de la forme

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \dots + \beta_m A_m \text{ tq } m \in \mathbb{N}^* \text{ et } \beta_1, \dots, \beta_m \text{ scalaires.}$$