Ex5: Montrer que : $X^4 + 2X^2 + 4X - 1$ n'a que des racines simples.

Notons $P(X) = X^4 + 2X^2 - 4X + 1$.

- α est racine de P d'ordre de multiplicité au moins 2 ssi $\tilde{P}(\alpha) = \tilde{P}'(\alpha) = 0$. ssi α est racine de P et P'.

- Par conséquent,

P n'a pas de racine multiple $\Leftrightarrow$ P et P' n'ont aucune racine en commun.

- Cherchons les racines communes à P et P'

On a $P'(X) = 4X^3 + 4X + 4$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

$P'(\alpha) = P(\alpha) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^4 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 1 = 0 & (l_1) \\ \alpha^3 + \alpha + 1 = 0 & (l_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^4 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 1 = 0 & (l_1) \\ \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha = 0 & (\alpha \times l_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha - 1 = 0 \quad (l_1 - l_2)$$

Posons $\Delta = 9 + 4 = 13$

et $\alpha_1 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$.

$\boxed{\text{Donc les seules racines multiples de } P \text{ possibles sont } \alpha_1 \text{ et } \alpha_2}$

Or, $P(\alpha_1) = (\alpha_1^2)^2 + 2\alpha_1^2 + 4\alpha_1 - 1$

$$= (\alpha_1^2)^2 + 2\left(\frac{9 + 13 + 6\sqrt{13}}{4}\right) - 6 - 2\sqrt{13} - 1$$

$$= \left(\frac{11 + 3\sqrt{13}}{2}\right)^2 + 11 + 3\sqrt{13} - 6 - 2\sqrt{13} - 1$$

$$\neq 0.$$

De même $P(\alpha_2) \neq 0$.

Ainsi $\boxed{P \text{ n'a aucune racine multiple}}$.