

Ex 5

EX 6 Sommes de Riemann. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2) dt$ (où x variable réelle)

- Domaine de définition de f .
 - Compléter la phrase : $f(x)$ existe dès que
 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_x: (t \mapsto \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2))$ est continue sur $]0, \pi[$.
 - Montrer que $g_x: (t \mapsto \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2))$ est continue en 0 (resp π) si et seulement si $x \neq 1$ (resp -1).
 - En déduire que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
- Soit x réel tel que $|x| \neq 1$ et n entier naturel, on note $S_n(x) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 - 2x \cos(\frac{k\pi}{n}) + x^2)$.
 - Trouver la forme développée de $P_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - e^{\frac{ik\pi}{n}})(x - e^{-\frac{ik\pi}{n}})$.
 - En déduire enfin $S_n(x)$.
- En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ selon que $|x| > 1$ ou $|x| < 1$.

1)
a) $f(x)$ existe dès que $(t \mapsto \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2))$ est continue sur $]0, \pi[$ (ou continue sur $]0, \pi[$ et prolongable par continuité en 0 et en π).

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.
 g_x continue sur $]0, \pi[$
 $\Leftrightarrow g_x$ est définie sur $]0, \pi[$
 $\Leftrightarrow \forall t \in]0, \pi[, 1 - 2x \cos t + x^2 > 0$

Or, $\Delta = 4x^2 - 4 = -4 \sin^2 t < 0$ si $t \in]0, \pi[$. Donc si $t \in]0, \pi[$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - 2x \cos t + x^2$ est du signe strict du coef de x^2 . Ainsi,

$\forall t \in]0, \pi[, \forall x \in \mathbb{R}, 1 - 2x \cos t + x^2 > 0$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, g_x$ est continue sur $]0, \pi[$.

c) Si $x = 1$ alors $g_1: (t \mapsto \ln(2 - 2 \cos t))$
Donc $\lim_{t \rightarrow 0} g_1(t) = -\infty$ et g_1 n'est pas définie et pas prolongable par continuité en 0.

Si $x \neq 1$ alors $\lim_{t \rightarrow 0} 1 - 2x \cos t + x^2 = 1 - 2x + x^2 = (x-1)^2 > 0$
Donc $\lim_{t \rightarrow 0} \ln(1 - 2x \cos t + x^2) = \ln(x-1)^2 = g_x(0)$

Ainsi g_x est continue en 0.

Ainsi g_t est continue en 0 $\Leftrightarrow x \neq 1$.
De même, g_t est continue en $\pi \Leftrightarrow x \neq -1$.

d) Ainsi f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ tq $x \neq \pm 1$. On note $S_n(x) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 - 2x \cos(\frac{k\pi}{n}) + x^2)$.

a) $P_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - e^{\frac{ik\pi}{n}})(x - e^{-\frac{ik\pi}{n}})$

Or, les opes $1, e^{\frac{i\pi}{n}}, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{(n-1)i\pi}{n}}, e^{-\frac{i\pi}{n}}, e^{-\frac{2i\pi}{n}}, \dots, e^{-\frac{(n-1)i\pi}{n}}$ sont les racines $2n$ ièmes de l'unité.

Par conséquent,

$$x^{2n} - 1 = (x-1)(x+1) \prod_{k=1}^{n-1} (x - e^{\frac{ik\pi}{n}})(x - e^{-\frac{ik\pi}{n}})$$

$$x^{2n} - 1 = (x-1)(x+1)^2 \prod_{k=1}^{n-1} (x - e^{\frac{ik\pi}{n}})(x - e^{-\frac{ik\pi}{n}})$$

$P_n(x)$

1

$$x^{2n} - 1 = \frac{x-1}{x+1} P_n(x).$$

$$\text{Ainsi } P_n(x) = \left(\frac{x^{2n}-1}{x-1} \right) (x+1)$$

$$(b) S_n(x) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - 2x \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + x^2 \right)$$

$$= \frac{\pi}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^n \left(1 - 2x \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + x^2 \right) \right)$$

$$= \frac{\pi}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^n \left(x - e^{i\frac{k\pi}{n}} \right) \left(x - e^{-i\frac{k\pi}{n}} \right) \right)$$

$$S_n(x) = \frac{\pi}{n} \ln \left[\left(\frac{x^{2n}-1}{x-1} \right) (x+1) \right]$$

si $|x| > 1$ ie $x^2 > 1$ alors

$$S_n(x) = \frac{\pi}{n} \ln \left[x^{2n} \left[\frac{1-x^{-2n}}{x-1} \right] (x+1) \right]$$

$$= \frac{\pi}{n} \left\{ n \ln(x^2) + \ln \left[\frac{1-x^{-2n}}{x-1} \right] (x+1) \right\}$$

$$= \pi \ln(x^2) + \frac{\pi}{n} \ln \left[\frac{1-(x^2)^{-n}}{x-1} (x+1) \right]$$

$\downarrow n \rightarrow +\infty$ $\downarrow n \rightarrow +\infty$ $\downarrow n \rightarrow +\infty$
 $\pi \ln(x^2)$ 0 $\ln \left(\frac{1}{x-1} (x+1) \right)$

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \pi \ln(x^2) \text{ si } |x| > 1$$

CCL:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1; 1[\\ \pi \ln(x^2) & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$



$\ln(x^2) = 2 \ln x$ uniquement pour $x > 0$,
 ie $|x| > 1$ ie $x < -1$ ou $x > 1$, donc
 il ne faut jamais remplacer
 $\ln(x^2)$ par $2 \ln x$

3] Je remarque que:

$$S_n(x) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n g_x \left(\frac{k\pi}{n} \right) \text{ est une}$$

somme de Riemann de g_x sur $[0, \pi]$.

Comme g_x est continue sur $[0, \pi]$,

$$\int_0^\pi g_x(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x).$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)^n - 1}{x^2 - 1} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 1 \\ \frac{-1}{x-1} & \text{si } x \in]-1, 1[\\ -\infty & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \begin{cases} FI & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } x \in]-1, 1[\end{cases}$$

2