

Ex 6 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que :  $(X-1)^2$  divise  $aX^{n+1} + bX^n + 1$  et on déterminera alors le quotient.

Notons  $B = (X-1)^2$

et  $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ .

1) Condition sur  $a$  et  $b$  pour que  $B$  divise  $P$   
 $B$  divise  $P$

$\Leftrightarrow$  les racines de  $B$  sont racines de  $P$  avec une mult. dans  $P$  sup. ou égale à celle de  $B$ .

$\Leftrightarrow 1$  est racine au moins double de  $P$

$\Leftrightarrow \tilde{P}(1) = \tilde{P}'(1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+1=0 & (l_1) \\ (n+1)a + nb = 0 & (l_2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = n & (l_2 - n \times l_1) \\ b = -n-1 \end{cases}$

cf :  $B$  divise  $P$  si et si  $\begin{cases} a = n \\ b = -(n+1) \end{cases}$

2) Déterminons le quotient quand  $B$  divise  $P$ .

Prends  $a = n$  et  $b = -(n+1)$  - Alors

$P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$

$= n(X^{n+1} - X^n) - (X^n - 1)$

$= nX^n [X-1] - (X-1) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} X^k \right]$

$= (X-1) \left[ nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k \right]$

$= (X-1) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} X^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k \right]$

$= (X-1) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (X^n - X^k) \right]$

$= (X-1) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} X^k (X^{n-k} - 1) \right]$

$P = (X-1) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} X^k (X-1) \left( \sum_{j=0}^{n-k-1} X^j \right) \right]$

$P = (X-1)^2 \left[ \sum_{k=0}^{n-1} X^k \left( \sum_{j=0}^{n-k-1} X^j \right) \right]$

$P = (X-1)^2 \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} X^{j+k} \right]$

$P = (X-1)^2 \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=k}^{n-1} X^l \right]$

$= (X-1)^2 \left[ \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^l X^l \right]$

$P = (X-1)^2 \left[ \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) X^l \right]$

$P = (X-1)^2 \left( \sum_{j=1}^n j X^{j-1} \right)$

Vérification pour  $n=2$ .

$P = 2X^3 - 3X^2 + 1$

et  $(X-1)^2 \left( \sum_{j=1}^2 j X^{j-1} \right) = (X-1)^2 (1+2X)$   
 $= (X^2 - 2X + 1)(1+2X)$   
 $= 2X^3 - 3X^2 + 1$

OK.