Ex 6 ~~Ex 5~~ Propriétés des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ scindée sur $\mathbb{R}$. de $\deg \geq 2$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* P scindé sur $\mathbb{R}$. On note λ le coefficient dominant de P et note $\alpha_1, .., \alpha_s$ les racines de P de multiplicités respectives *non nulles* $m_1, .., m_s$ où $s \in \mathbb{N}^*$. $\alpha_1, .., \alpha_s$ étant réels, on peut les ordonner. On impose : $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_s$.

On a : $P = \lambda \prod_{k=1}^{s} (X - \alpha_k)^{m_k}$.

1. Exprimer $\deg(P)$ en fonction de $m_1, .., m_s$.

I Forme scindée de P'.

2. Quelle est la multiplicité de $\alpha_1, .., \alpha_s$ en tant que racines de P' ? (multiplicité nulle " = " pas racine)
3. Justifier que pour tout $k \in [\![1, s-1]\!]$, il existe $c_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ *tel que* $\tilde{P}'(c_k) = 0$. $\underline{\underline{s \geq 2}}$.
4. Déduire de ce qui précède que P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$ et donner sa forme scindée.

1] $\deg P = \sum_{k=1}^{s} m_k$.

2] Soit $k \in [\![1, s]\!]$.
α_k est racine de P de multiplicité m_k
donc α_k est racine de $P', \underbrace{P''}_{=(P')'}, .., \underbrace{P^{(m_k-1)}}_{=(P')^{(m_k-2)}}$ mais
pas racine de $\underbrace{P^{(m_k)}}_{=(P')^{(m_k-1)}}$

donc α_k est racine de $P', (P')', (P')'', ..(P')^{(m_k-2)}$
mais pas de $(P')^{(m_k-1)}$

donc α_k est racine de P' d'ordre de multiplicité $m_k - 1$ (valable pour $m_k = 1$ car si $m_k = 1$ alors α_k est racine simple de P et donc α_k n'est pas racine de P' ie α_k est racine de P' de multiplicité $0 = m_k - 1$)

3] Soit $k \in [\![1, s-1]\!]$. (ici $s \geq 2$).

$\tilde{P}$ est continue sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$
dérivable sur $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$

$\tilde{P}(\alpha_k) = 0 = \tilde{P}(\alpha_{k+1})$

Donc le théorème de Rolle assure que $\tilde{P}'$ s'annule au moins une fois dans $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ ie $\exists c_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ /

$\tilde{P}'(c_k) = 0$.

4] α_1 racine de P' de mult $m_1 - 1$
α_2 " " $m_2 - 1$
⋮
α_s " " $m_s - 1$

c_1 racine de P' de mult au moins 1
c_2 " " 1
⋮
c_{s-1} " " " 1

Ainsi on a trouvé n racines de P' tq

$$\boxed{n =} \left(\sum_{k=1}^{s}(m_k - 1)\right) + \underbrace{(s-1)}_{=0 \text{ si } P \text{ a une unique racine.}}$$

Or, $\sum_{k=1}^{s}(m_k - 1) = \left(\sum_{k=1}^{s} m_k\right) - s = \deg P - s$

donc $n = \deg P - 1 = \deg P'$.

Ainsi, P' ne peut avoir d'autres racines (car $P' \neq 0$). Donc P' est scindé sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{P' = m \times \mathrm{codom} P \times \underbrace{\prod_{k=1}^{s}(X - \alpha_k)^{m_k - 1}}_{\text{n'existe pas si toutes les racines sont simples.}} \underbrace{\prod_{k=1}^{s-1}(X - c_k)}_{\text{n'existe pas si } s=1 \text{ (ie } P \text{ a une racine)}}}$$

II Décomposition en éléments simples de P'/P . On pose $F(t) = \frac{\widetilde{P'}(t)}{\widetilde{P}(t)}$ où t réel.

5. Donner une expression de P' grâce à la forme scindée de P.(on utilisera la formule $(\prod_{k=1}^{n} P_k)' = \cdots$.)
6. En déduire que $\forall t \in D_F, F(t) = \sum_{k=1}^{s} \frac{m_k}{t-\alpha_k}$. (c'est la décomposition en éléments simples de F !!)
7. Application : Déterminer $\int \frac{5t^4-16t^3+3t^2+20t-4}{t^5-4t^4+t^3+10t^2-4t-8} dt$ (on précisera sur quel intervalle on travaille).

5] $P = \lambda \prod_{k=1}^{s} (X-\alpha_k)^{m_k}$ donc

$$\boxed{P' = \lambda \left[\sum_{j=1}^{s} m_j (X-\alpha_j)^{m_j-1} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{s} (X-\alpha_k)^{m_k} \right) \right]}$$

6] $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, .., \alpha_s\}$,

$$\widetilde{P'}(x) = \lambda \sum_{j=1}^{s} m_j (x-\alpha_j)^{m_j-1} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{s} (x-\alpha_k)^{m_k} \right)$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{s} \frac{m_j}{x-\alpha_j} (x-\alpha_j)^{m_j} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{s} (x-\alpha_k)^{m_k}$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{s} \frac{m_j}{x-\alpha_j} \left(\prod_{k=1}^{s} (x-\alpha_k)^{m_k} \right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{m_j}{x-\alpha_j} \right) \left(\lambda \prod (x-\alpha_k)^{m_k} \right)$$

$$\widetilde{P'}(x) = \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{m_j}{x-\alpha_j} \right) \widetilde{P}(x)$$

Donc $\boxed{F(x) = \frac{\widetilde{P'}(x)}{\widetilde{P}(x)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{m_j}{x-\alpha_j}}$

7] Posons $P(t) = t^5 - 4t^4 + t^3 + 10t^2 - 4t - 8$

alors $P'(t) = 5t^4 - 16t^3 + 3t^2 + 20t - 4$

Posons $F(t) = \frac{P'(t)}{P(t)}$.

Factorisons P sous forme scindée sur $\mathbb{R}$ (si c'est possible !)

$P(-1) = P'(-1) = 0$
$P(2) = P'(2) = P''(2) = 0$

donc -1 est racine au moins double de P et 2 au moins triple.

Or $\deg P = 5$ donc P n'a pas d'autres racines et on a trouvé les multiplicités exactes.

Ainsi, $P(t) = (t+1)^2 (t-2)^3$.

Alors d'après 6, $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$,

$$\boxed{F(t) = \frac{2}{t+1} + \frac{3}{t-2}}.$$

F étant continue sur chaque intervalle $]-\infty; -1[$, $]-1, 2[$, $]2, +\infty[$, F admet une primitive sur chacun de ces intervalles qui sera de la forme ($t \mapsto 2 \ln|t+1| + 3 \ln|t-2| + \text{cste}$).

III Décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$ quand P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

On suppose ici que $m_1 = m_2 = .. = m_s = 1$ (*ie. toutes les racines de P sont simples*). On pose $\forall t \in D, G(t) = \frac{1}{\tilde{P}(t)}$.

La décomposition en éléments simples de G est de la forme : $\forall t \in D,\ G(t) = \sum_{k=1}^{s} \frac{u_k}{t-\alpha_k}$ où $u_1, .., u_s$ constantes réelles.

8. Soit $j \in [\![1, s]\!]$. Justifier que $\tilde{P}'(\alpha_j) \neq 0$ *et* montrer que $\lim_{t\to\alpha_j} (t-\alpha_j)G(t) = \frac{1}{\tilde{P}'(\alpha_j)}$.
9. En déduire que : $\forall t \in D,\ G(t) = \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{\tilde{P}'(\alpha_j)} \frac{1}{t-\alpha_k}$ (c'est la décomposition en éléments simples de G).
10. Application : Calculer $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^3-2n^2-n+2}$ après avoir justifier de son existence.

8] Soit $j \in [\![1, s]\!]$.

• $m_j = 1$ donc α_j est racine simple de P et n'est donc pas racine de P'. Ainsi, $\tilde{P}'(\alpha_j) \neq 0$.

• $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, .., \alpha_s\}$,

$$(t-\alpha_j)G(t) = \frac{t-\alpha_j}{\lambda \prod_{k=1}^{s}(t-\alpha_k)} = \frac{1}{\lambda \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{s}(t-\alpha_k)}$$

Donc $\boxed{\lim_{t\to\alpha_j} (t-\alpha_j)G(t) = \frac{1}{\lambda \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{s}(\alpha_j-\alpha_k)}}$.

cf 5

Or, $\tilde{P}'(t) = \lambda \sum_{i=1}^{s} \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{s} (t-\alpha_k)$ (car $m_i = 1$)

Donc $\tilde{P}'(\alpha_j) = \lambda \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{s} (\alpha_j - \alpha_k)}_{=0 \text{ si } i\neq j}$

car si $i \neq j$ alors k prend la valeur j donc dans le produit apparait $\alpha_j - \alpha_j = 0$

$$\boxed{\tilde{P}'(\alpha_j) = \lambda \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{s} (\alpha_j - \alpha_k)}$$

Ainsi $\lim_{t\to\alpha_j} (t-\alpha_j)G(t) = \frac{1}{\tilde{P}'(\alpha_j)}$

9] D'autre part,

$$(t-\alpha_j)G(t) = \sum_{k=1}^{s} \frac{u_k(t-\alpha_j)}{t-\alpha_k}$$

$$(t-\alpha_j)G(t) = \left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{s} u_k \frac{t-\alpha_j}{t-\alpha_k}\right) + u_j \frac{t-\alpha_j}{t-\alpha_j}$$

$$= \left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{s} u_k \frac{t-\alpha_j}{t-\alpha_k}\right) + u_j$$

Donc $\lim_{t\to\alpha_j} (t-\alpha_j)G(t) = u_j$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } u_j = \frac{1}{\tilde{P}'(\alpha_j)} \text{ et } G(t) = \frac{1}{\tilde{P}(t)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{\tilde{P}'(\alpha_j)} \frac{1}{t-\alpha_j}}$$

10] Posons $u_n = \frac{1}{n^3-2n^2-n+2}$.

• Alors $u_n \sim \frac{1}{n^3}$ et $\left(\sum \frac{1}{n^3}\right)$ est une série de Riemann convergente donc $\sum_{n\geq 3} u_n$ CV.

• $\forall n$, $n^3-2n^2-n+2 = n^2(n-2) - (n-2)$
$= (n-1)(n+1)(n-2)$

Donc $P(X) = X^3-2X^2-X+2 = (X-1)(X+1)(X-2)$. est scindé à racines simples. Dq, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, 2\}$

$$\frac{1}{\tilde{P}(x)} = \frac{1}{\tilde{P}'(1)} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{\tilde{P}'(2)} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{\tilde{P}'(-1)} \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{\tilde{P}(x)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{1}{6}\frac{1}{x+1}$$

Alors $\forall n \geq 3$,

$$\frac{1}{n^3-2n^2-n+2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{n-2} + \frac{1}{6}\frac{1}{n+1}$$

Alors $\forall N \geq 3$,

$$S_N = \sum_{n=3}^{N} u_n = -\frac{1}{2} \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n-1} + \frac{1}{3} \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n-2} + \frac{1}{6} \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n+1}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{N-2} \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \sum_{n=4}^{N+1} \frac{1}{n}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\sum_{n=4}^{N-2} \frac{1}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{N-1} \right] + \frac{1}{3} \left[\sum_{n=4}^{N-2} \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right] + \frac{1}{6} \left[\sum_{n=4}^{N-2} \frac{1}{n} + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} \right].$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right)}_{=0} \left(\sum_{n=3}^{N-2} \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{N-1} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} \right) - \frac{5}{12} + \frac{11}{18}$$

$$S_N = \frac{7}{36} - \frac{1}{3} \frac{1}{N-1} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} \right)$$

Ainsi, $\lim_{N \to +\infty} S_N = \frac{7}{36}$ i.e. $\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty} u_n = \frac{7}{36}}$