**Ex 6 bis** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(X-2)(X-3)$ divise $(X-3)^{2n} + (X-2)^n - 1$
2. Déterminer le quotient. (indication : on écrira $(X-2) = (X-3)+1$ puis $(X-3) = (X-2)-1$).

Posons $P = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 1$

et $B = (X-2)(X-3)$ scindé sur $\mathbb{R}$

1) Montrons que $B$ divise $P$

• $B$ divise $P$

$\Leftrightarrow$ les racines de $B$ sont racines de $P$ avec une mult. dans $P$ sup ou égal à celle dans $B$

$\Leftrightarrow$ 2 et 3 sont racines de $P$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{P}(2) = \tilde{P}(3) = 0$

• Or, $\tilde{P}(2) = (-1)^{2n} - 1 = 0$

$\tilde{P}(3) = \underbrace{0^{2n}}_{=0 \text{ car } n \geq 1} + 1^n - 1 = 0$

• Ainsi $\boxed{B \text{ divise } P}$.

2) Déterminons le quotient de la division euclidienne de $P$ par $B$.

$$P = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 1$$

$$= (X-3)^{2n} + ((X-3)+1)^n - 1$$

$$= (X-3)^{2n} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (X-3)^k - 1$$

$$= (X-3)^{2n} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (X-3)^k$$

$$P = (X-3)\left[(X-3)^{\overset{\geq 0 \text{ car } n \geq 1}{2n-1}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (X-3)^{\overset{\text{puissance positive}}{k-1}}\right]$$

$$\boxed{P = (X-3)\underbrace{\left[(X-3)^{2n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} (X-3)^k\right]}_{\text{quotient de la division euclidienne de } P \text{ par } X-3.}}$$

$$P = (X-3)\left[(X-2-1)^{2n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} (X-2-1)^k\right]$$

$$= (X-3)\left[\overbrace{\sum_{j=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{j} (-1)^{2n-1-j} (X-2)^j}^{T(X)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} (X-2)^j\right)}_{S(X)}\right]$$

Réarrangeons $S(X)$.

$$S(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k+1} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} (X-2)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j}^{n-1} \binom{n}{k+1} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} (X-2)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=j}^{n-1} \binom{n}{k+1} \binom{k}{j} (-1)^{k-j}\right] (X-2)^j$$

Vérifions que les coef de $(X-2)^0$ de $T$ et de $S$ sont opposés :

celui de $T$ vaut $\binom{2n-1}{0} (-1)^{2n-1} = -1$.

celui de $S$ vaut $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \binom{k}{0} (-1)^k$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} (-1)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1}$$

$$= -\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k - 1\right)$$

$$= -\left((1-1)^n - 1\right)$$

$$= 1. \text{ OK !}$$

Ainsi les deux termes ajoutés donnent 0

Donc

$$P = (X-3)\left[\sum_{j=1}^{2n-1}\binom{2n+1}{j}(-1)^{2n-1-j}(X-2)^{j} + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n-1}\binom{n}{k+1}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\right)(X-2)^{j}\right]$$

$$\boxed{P = (X-3)(X-2)\underbrace{\left[\sum_{j=1}^{2n-1}\binom{2n+1}{j}(-1)^{2n-1-j}(X-2)^{\overset{\geq 0}{j-1}} + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n-1}\binom{n}{k+1}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\right)(X-2)^{\overset{\geq 0}{j-1}}\right]}_{\text{le quotient } Q \text{ de la division euclidienne de } P \text{ par } B.}}$$

→ comme les deux sommes démarrent de $j=1$, $X-2$ divise chaque terme de la somme et je peux donc le mettre en facteur !

$$(X-2)^{j-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=1 \\ X-2 & \text{si } j=2 \\ \vdots & \\ (X-2)^{2n-2} & \text{si } j=2n-2. \end{cases}$$