**Ex 7** ~~Ex 6~~ **QUIZZ : le PLUS des fonctions polynomiales**

1. Justifier de deux manières que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair a toujours une racine réelle.
2. Quelles sont les fonctions polynômiales $f$ vérifiant : $\forall n, f^{(n)}(0) = 0$ ? Existe-t-il des fonctions $g$ non nullles telles que $\forall n, g^{(n)}(0) = 0$ ?
2. Si $f$ et $g$ sont deux fonctions polynômiales de degré 6 ayant 6 racines en commun, quelle relation y-a-t-il entre ces deux fonctions. Si on ajoute que $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$, que peut-on dire de $f$ et $g$?
   Que se passe-t-il si $\varphi$ et $\psi$ ne sont pas polynomiales mais s'annulent en 6 valeurs communes et sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ ?
3. Démontrer que si $f$ *et* $g$ sont deux fonctions polynômiales qui coïncident sur un intervalle non réduit à un point alors $f = g$ partout et $f$ *et* $g$ ont les mêmes coefficients. Ce résultat est-il vrai si $\varphi$ ou $\psi$ n'est pas polynomiale ?

1] 1ère démo : dans le cours

2ème demo soit $P$ tq $\deg P = 2n+1$ tq $n \in \mathbb{N}$.

Alors $\tilde{P}$ est continue sur $\mathbb{R}$

et $\tilde{P}(t) \underset{+\infty}{\sim} \text{codom}(P)\, t^{2n+1}$ $(\neq 0)$.

Donc $\lim_{t \to +\infty} \tilde{P}(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si codom } P > 0 \\ -\infty & \text{si codom } P < 0 \end{cases}$

et $\lim_{t \to -\infty} \tilde{P}(t) = \begin{cases} -\infty & \text{si codom } P > 0 \\ +\infty & \text{si codom } P < 0 \end{cases}$

Donc $\tilde{P}$ prend une valeur positive et une valeur négative. Ainsi le TVI assure que $\tilde{P}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Donc $\boxed{P \text{ a au moins une racine réelle}}$.

2] • D'après Taylor pour les polynômes, si $\forall n,\ f^{(n)}(0) = 0$ et $f$ polynomiale alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 \quad (\text{où } m \in \mathbb{N},\ m \geq \deg f).$$

Ainsi $\boxed{f = 0}$.

• Par contre si … n'est pas polynomiale alors les dérivées de $\varphi$ peuvent toutes s'annuler en 0 sans que $\varphi$ soit nulle. Exemple :

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2] • si $f$ et $g$ polynomiales de degré 6

et tq $\begin{cases} f(a_1) = g(a_1) = 0 \\ f(a_2) = g(a_2) = 0 \\ \vdots \\ f(a_6) = g(a_6) = 0 \end{cases}$ où $a_1, \dots, a_6$ sont 6 réels distincts.

Alors $f(x) = \lambda \prod_{k=1}^{6} (x - a_k)$ tq $\lambda, \mu$ ctes réelles non nulles.

et $g(x) = \mu \prod (x - a_k)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \alpha f(x)$ avec $\alpha = \frac{\mu}{\lambda}$ cte réelle. Ainsi, $f$ et $g$ sont associés.

Si de plus, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ alors nécessairement $\lambda x^6 \underset{+\infty}{\sim} \mu x^6$ et $\lambda \underset{+\infty}{\sim} \mu$. Donc $\lambda = \mu$ et $\alpha = 1$. Ainsi $\boxed{f = g}$.

• Si maintenant $\varphi$ ou $\psi$ ne sont pas polynomiales alors on ne peut rien dire….

Exemple : $\varphi(x) = x(x-\pi)(x-2\pi)(x-3\pi)(x-4\pi)(x-5\pi)$

$\psi(x) = \varphi(x) + \sin x$.

Alors $\varphi$ et $\psi$ s'annulent en $0, \pi, 2\pi, \dots, 5\pi$ et $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \psi(x)$. Mais $\varphi \neq \psi$ car $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 \neq \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$

3] • Soit $\begin{cases} I \text{ un intervalle contenant une infinité de réels} \\ f \text{ et } g \text{ polynomiale tq} \end{cases}$

$\forall x \in I, \; f(x) = g(x)$.

Alors $T = f - g$ est polynomiale et admet une infinité de racines qui sont tous les réels de $I$.

Ainsi, $T = 0$ et $\boxed{f = g}$

• Par ¢, si $\varphi$ ou $\psi$ n'est pas polynomiale et $\varphi$ et $\psi$ coïncident sur un intervalle alors le résultat est faux ...

¢ exemple :

$\varphi$ non polynomiale

. $\psi(x) = x$

. $\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$\psi$ et $\varphi$ coïncident sur l'intervalle $[0,1]$

$\forall x \in [0,1], \; \psi(x) = \varphi(x)$ et pourtant $\psi \neq \varphi$ car $\begin{cases} \varphi(2) = 2 \\ \psi(2) = 0 \end{cases}$