

Ex 7 Déterminer les polynôme de degré 3 multiple de $X - 1$ et dont les restes des divisions euclidiennes par $(X - 2)$, par $(X - 3)$ et par $(X - 4)$ sont égaux.

On cherche tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tq

- de degré 3
- multiple de $X - 1$
- dont les restes des divisions euclidiennes par $X - 2$, par $X - 3$, par $X - 4$ sont égaux.

Analyse: Supposons qu'un tel polynôme P existe. Alors il existe Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, R polynômes tq

$$\begin{cases} \deg P = 3 \\ P = (X-1)Q_1(X) \\ P = (X-2)Q_2(X) + R \\ P = (X-3)Q_3(X) + R \\ P = (X-4)Q_4(X) + R \end{cases}$$

avec $\deg R < \deg(X-2) = 1$

Donc, $R = c = \text{cste réelle}$

Alors, $\begin{cases} P - c = (X-2)Q_2(X) \\ P - c = (X-3)Q_3(X) \\ P - c = (X-4)Q_4(X) \end{cases}$

Donc, $P - c$ admet 2, 3 et 4 comme racines. Ainsi, je peux dire qu'il existe Q polynôme tq:

$P - c = (X-2)(X-3)(X-4)Q(X)$

Or, $\deg P = 3$ donc $\deg(P - c) = 3$

De plus, $\deg(P - c) = \deg(X-2) + \deg(X-3) + \deg(X-4) + \deg Q$

donc $3 = 3 + \deg Q$

donc $\deg Q = 0$ i.e. $Q = \beta = \text{cste réelle non nulle}$

Ainsi, $P = c + \beta(X-2)(X-3)(X-4)$

De plus, $X-1$ divise P . Cela signifie que 1 est racine de P i.e. $\tilde{P}(1) = 0$.

Or, $\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{P}(t) = c + \beta(t-2)(t-3)(t-4)$

Donc $0 = \tilde{P}(1) = c - 6\beta$.

Ainsi $c = 6\beta$ et finalement

$$P = \beta(6 + (X-2)(X-3)(X-4)) \text{ tq } \beta \text{ cste réelle non nulle.} \quad (*)$$

CL: Si P solution alors P vérifie la forme (*).

Synthèse. Réciproquement? Soit $\beta \in \mathbb{R}^*$ et

$P = \beta(6 + (X-2)(X-3)(X-4))$.

Alors $\tilde{P}(1) = \beta \times 0 = 0$ donc $X-1$ divise P

• $\deg P = 3$

• $P = (X-2)[\beta(X-3)(X-4)] + 6\beta$

$P = (X-3)[\beta(X-2)(X-4)] + 6\beta$

$P = (X-4)[\beta(X-2)(X-3)] + 6\beta$

et $\deg(6\beta) = 0 < 1 = \deg(X-2) = \deg(X-3) = \deg(X-4)$

Donc 6β est le reste de la division euclidienne de P par $X-2$, de P par $X-3$, de P par $X-4$.

Ainsi P est solution de notre pble.

Bilan: les sol^o de notre pble sont tous les polynômes de la forme:

$P = \beta(6 + (X-2)(X-3)(X-4))$

tq β cste réelle non nulle.