

TD 15.3

Factorisation et décomposition en éléments simples

COURS

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant possède au moins
 a exactement racines
 est sur $\mathbb{C}$.

Pour obtenir cette forme scindée sur $\mathbb{C}$,

1.
2.
3.

Tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ a un nombre de racines complexes non réelles et si P a une racine complexe ω non réelle de multiplicité m alors et $(X - \omega)^m (X - \bar{\omega})^m = (X^2 + \dots)^m$ divise

Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ degré impair

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont

Tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ non constant s'écrit et

Pour obtenir cette écriture,

1.
2.
3.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Les racines $N^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont :

Si $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ ($r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$) alors les racines $N^{\text{ièmes}}$ de a sont

Si $F = \frac{A}{B}$ est une fonction rationnelle réelle, alors les étapes de sa décomposition en éléments simples sont :

1.
2.
3.
4. CCL:

Ex 1 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $X^2 - 2X \cos a + 1$ divise $X^n \sin a - X \sin(na) + \sin(n-1)a$.

Ex 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser les polynômes suivants en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

1. $P = X^8 + X^4 + 1$.
2. $P = (1 - X^2)^3 + 8X^3$.
3. $P = X^6 + 1$
4. $P = X^n - R^n$ où R réel strictement positif
5. $P = X^{2n} - 2 \cos(\theta) X^n + 1$ où $\theta \in [0, \pi]$.

Ex 3 Factoriser les polynômes suivants en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

1. $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.
2. $P = X^7 - 5X^6 + 8X^5 - 4X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 5X + 1$.

Ex 4 1) Calculer $I = \int_0^1 \frac{t^5}{t^4 + 3t^3 + 4t^2 + 3t + 1} dt$ après avoir justifié son existence.

2) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+2)^2}$ après avoir justifié son existence.

Ex 5 Sommes de Riemann. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2) dt$ (où x variable réelle)

1. Domaine de définition de f .
 - a) Compléter la phrase : $f(x)$ existe dès que
 - b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_x: (t \mapsto \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2))$ est continue sur $]0, \pi[$.
 - c) Montrer que $g_x: (t \mapsto \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2))$ est continue en 0 si et si $x \neq 1$. CNS pour la continuité en π ?
 - d) En déduire que f est définie que $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
2. Soit x réel tel que $|x| \neq 1$ et n entier naturel non nul, on note $S_n(x) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 - 2x \cos(\frac{k\pi}{n}) + x^2)$.
 - a) Montrer que : $\prod_{k=1}^n \left(x - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \left(x - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right) = \left(\frac{x^{2n}-1}{x-1}\right)(x+1)$.
 - b) En déduire $S_n(x)$.
3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ selon que $|x| > 1$ ou $|x| < 1$.

EX 6 Propriétés des polynômes scindés sur $\mathbb{R}$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que P scindé sur $\mathbb{R}$ et $\deg(P) \geq 2$. On note λ le coefficient dominant de P et $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ les racines de P de multiplicités respectives non nulles $m_1, \dots, m_s$ où $s \in \mathbb{N}^*$. $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ étant réels, on peut les ordonner. On impose donc : $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_s$. On a ainsi, $P = \lambda \prod_{k=1}^s (X - \alpha_k)^{m_k}$.

1. Exprimer $\deg(P)$ en fonction de $m_1, \dots, m_s$. On note $D = \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

I Forme scindée sur $\mathbb{R}$ de P' quand P est scindé sur $\mathbb{R}$

- Quelle est la multiplicité de $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ en tant que racines de P' ? (multiplicité nulle " = " pas racine)
- Ici, je suppose que $s \geq 2$ (i.e. P a au moins deux racines réelles distinctes). Justifier que pour tout $k \in \llbracket 1, s-1 \rrbracket$, il existe $c_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $\tilde{P}'(c_k) = 0$.
- Déduire de ce qui précède que P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$ et donner sa forme scindée.

II Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ quand P est scindé sur $\mathbb{R}$. On pose $F(t) = \frac{\tilde{P}'(t)}{\tilde{P}(t)}$ pour tout $t \in D$.

- Donner une expression de P' grâce à la forme scindée de P . (on utilisera la formule $(\prod_{k=1}^n P_k)' = \dots$)
- En déduire que $\forall t \in D_F, F(t) = \sum_{k=1}^s \frac{m_k}{t - \alpha_k}$. (c'est la décomposition en éléments simples de F !!)
- Application : Déterminer $\int \frac{5t^4 - 16t^3 + 3t^2 + 20t - 4}{t^5 - 4t^4 + t^3 + 10t^2 - 4t - 8} dt$ (on précisera sur quel intervalle on travaille).

III Décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$ quand P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

On suppose ici que $m_1 = m_2 = \dots = m_s = 1$ i.e. toutes les racines de P sont réelles et simples. On pose $\forall t \in D, G(t) = \frac{1}{\tilde{P}(t)}$.

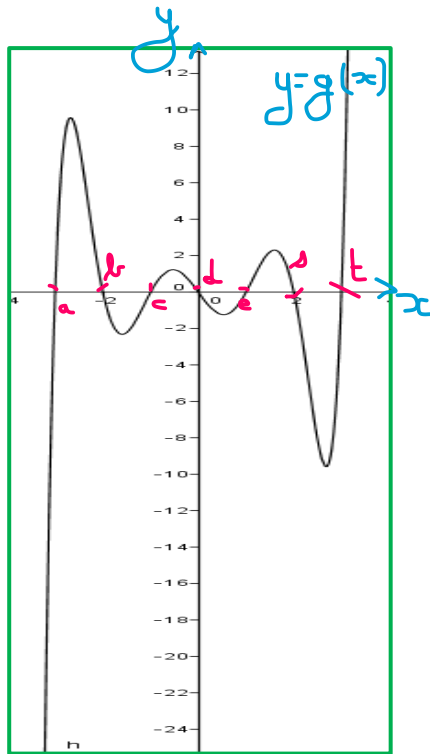
La décomposition en éléments simples de G est de la forme : $\forall t \in D, G(t) = \sum_{k=1}^s \frac{u_k}{t - \alpha_k}$ où $u_1, \dots, u_s$ constantes réelles.

- Soit $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$. Justifier que $\tilde{P}'(\alpha_j) \neq 0$ et montrer que $\lim_{t \rightarrow \alpha_j} (t - \alpha_j)G(t) = \frac{1}{\tilde{P}'(\alpha_j)}$.
- En déduire que : $\forall t \in D, G(t) = \sum_{k=1}^s \frac{1}{\tilde{P}'(\alpha_k)} \frac{1}{t - \alpha_k}$ (c'est la décomposition en éléments simples de G).
- Application : Calculer $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^3 - 2n^2 - n + 2}$ après avoir justifier de son existence.

Ex 7 QUIZZ : le PLUS des fonctions polynomiales

A chaque fonction polynomiale f (resp. g), on associe le polynôme P (resp. Q).

- Justifier de deux manières que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair a toujours une racine réelle.
- Quelles sont les fonctions polynômiales f vérifiant : $\forall n, f^{(n)}(0) = 0$?
Existe-t-il des fonctions φ non nulles telles que $\forall n, \varphi^{(n)}(0) = 0$?
- Si f et g sont deux fonctions polynômiales de degré 6 ayant 6 racines en commun, quelle relation y-a-t-il entre ces deux fonctions ? Si on ajoute que $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$, que peut-on dire de f et g ?
Que peut-on dire si φ ou Ψ n'est pas polynomiale mais φ et Ψ s'annulent en 6 valeurs communes et sont équivalentes au voisinage de $+\infty$?
- Démontrer que si f et g sont deux fonctions polynômiales qui coïncident sur un intervalle non vide et non réduit à un point alors $f = g$ partout et f et g ont les mêmes coefficients.
Que peut-on dire si φ ou Ψ n'est pas polynomiale mais φ et Ψ coïncident sur un intervalle non vide et non réduit à un point ?
- Parmi les courbes suivantes, quelle sont celles qui ne peuvent pas être la courbe d'une fonction polynomiale de degré 5 ? Et expliquer pourquoi ? On précisera pour chaque courbe, si cette courbe peut être la courbe d'une fonction polynomiale et le cas échéant de quel degré ?



NON, ce n'est pas la courbe d'une fonction polynomiale de degré 5. En effet, cette fonction g s'annule 7 fois sur $\mathbb{R}$ (en $a, b \dots$ et t) et ne peut donc pas être polynomiale de degré 5.

g pourrait par contre être polynomiale. Dans ce cas, ses racines réelles sont toutes simples puisqu'aucune tangente aux points d'abscisses $a, b, c \dots, t$ n'est horizontale. Cela signifie que g' ne s'annule pas en a , ni en $b \dots$, ni en t . Et par conséquent, ces racines réelles sont simples. Mais elle pourrait aussi avoir des racines complexes

de degré 7 de la forme :

$$g(x) = 16(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)(x-s)(x-t)$$

Ou de degré 9 de la forme

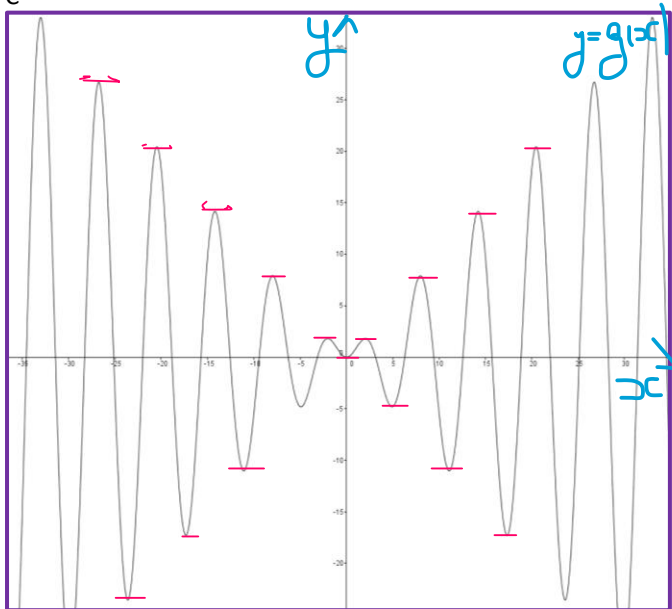
$$g(x) = 23(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)(x-s)(x-t)(x^2+x+1)$$

Ou de degré 11 ou 13 de la forme

$$g(x) = 23(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)(x-s)(x-t)(x^2+1)^2(x^2+x+1)$$

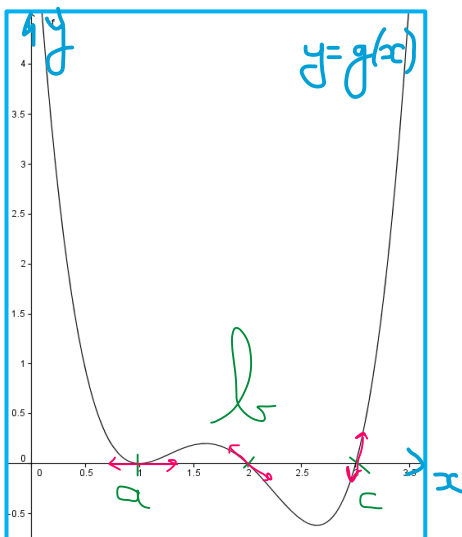
....

C



NON, ce n'est pas la courbe d'une fonction polynomiale de degré 5. En effet,

cette fonction g s'annule une infinité de fois sans être la fonction nulle. **Donc, g n'est pas polynomiale du tout.** On remarque en outre que sa dérivée s'annule aussi une infinité de fois sans être la fonction nulle.



NON, ce n'est pas la courbe d'une fonction polynomiale de degré 5. En effet, cette fonction g tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Or une fonction polynomiale de degré 5 tend vers deux infinis opposés en $+\infty$ et en $-\infty$.

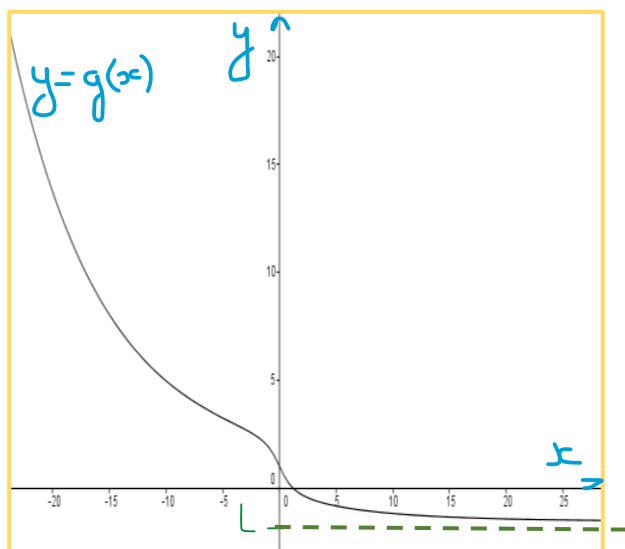
Par contre, g peut être polynomiale : g s'annule 3 fois sur $\mathbb{R}$ en a, b , et c et g' s'annule en a mais pas en b , ni en c . Donc a est racine au moins double de g et b et c sont simples. g peut avoir d'autres racines complexes... g tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$, donc si g est polynomiale alors $\deg(g)$ est pair et $\text{codom}(g) > 0$. On pourra avoir

$$g(x) = 4(x-a)^2(x-b)(x-c)$$

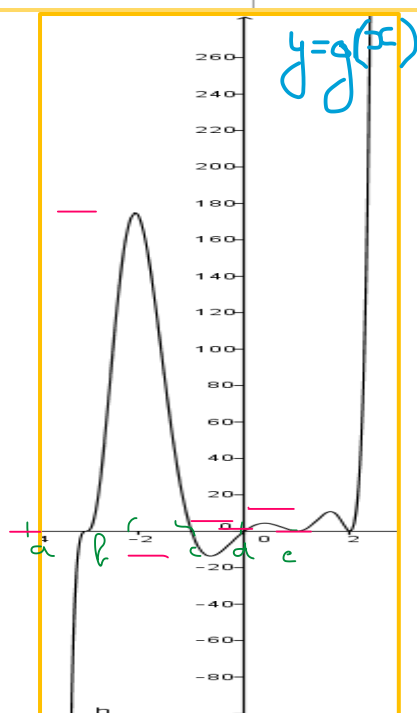
Ou encore

$$g(x) = 13(x-a)^2(x-b)(x-c)(x^2+1)$$

Ou encore



NON, ce n'est pas la courbe d'une fonction polynomiale de degré 5. En effet, cette fonction g ne tend pas vers l'infini en $+\infty$. g n'est d'ailleurs pas polynomiale du tout car elle n'est pas constante et tend vers une limite finie L en $+\infty$. Or, toute fonction polynomiale non constante tend vers l'infini en l'infini.



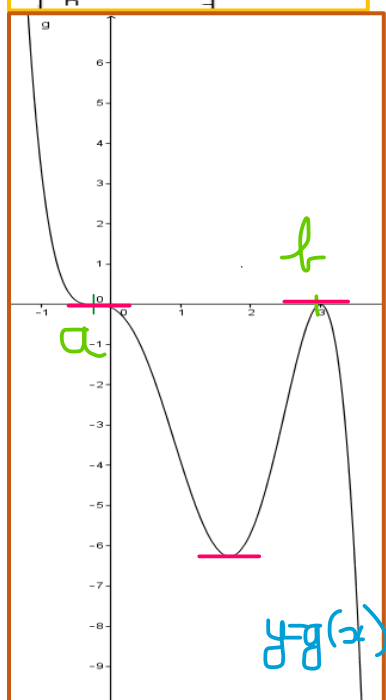
NON, ce n'est pas la courbe d'une fonction polynomiale de degré 5. En effet, cette fonction g' s'annule 7 fois sur $\mathbb{R}$ et g' ne peut donc pas être polynomiale de degré 4. g pourrait par contre être polynomiale. Dans ce cas, a, b, c, d , et e sont les seules racines réelles de g mais g peut avoir des racines complexes (deux à deux conjuguées puisque g est une fonction réelle). D'après les tangentes de C_g aux points d'abscisses a, b, c, d et e , a, d et e sont des racines réelles d'ordre de multiplicité au moins 2, b et c sont simples et De plus, étant donné les limites de g en $\pm\infty$, $\deg(g)$ est impair et $\text{codom}(g) > 0$. on pourrait avoir :

$$g(x) = 16(x-a)^2(x-b)(x-c)(x-d)^3(x-e)^2$$

Ou

$$g(x) = 157(x-a)^5(x-b)(x-c)(x-d)^2(x-e)^2(x^2-x+1)^4(x^2+1)^2$$

Ou



Oui c'est possible que g soit une fonction polynomiale de degré 5. En effet, g ne s'annule que deux fois sur $\mathbb{R}$ en a et b qui sont de multiplicité au moins 2. g' ne s'annule que 3 fois sur $\mathbb{R}$ les limites de g en $\pm\infty$ sont infinies et opposées. g pourrait être de la forme : $g(x) = -7(x-a)^2(x-b)^3$
NB : Comme $\deg(g) = 5$ et a et b ont des multiplicités p et q supérieures à 2. Alors, $0 \leq 5 - a - b \leq 1$. Par conséquent, le quotient $Q(x)$ de la division euclidienne de $g(x)$ par $(x-a)^p(x-b)^q$ est de degré 0 ou 1. Mais si $\deg(Q) = 1$, cela signifie que $Q(x) = ux + v$ avec u et v réels et Q a une racine réelle $-v/u$ distinctes de a et b . Donc g aurait une autre racine réelle ce qui est exclu. Ainsi $\deg(Q)=0$ i.e. $Q = \text{cste}$ non nulle et ainsi, $p + q = 5$ donc $p = 2$ et $q = 3$ ou $p = 3$ et $q = 2$ et g n'a pas d'autres racines complexes. Ainsi, si g est polynomiale de degré 5 et à la courbe ci-contre alors nécessairement : $g(x) = \lambda(x-a)^2(x-b)^3$ ou $g(x) = \lambda(x-a)^3(x-b)^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

