Ex 7

~~Ex 6~~ **QUIZZ : le PLUS des fonctions polynomiales**

1. Justifier de deux manières que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair a toujours une racine réelle.
2. Quelles sont les fonctions polynômiales f vérifiant : $\forall n, f^{(n)}(0) = 0$? Existe-t-il des fonctions g non nullles telles que $\forall n, g^{(n)}(0) = 0$?
2. Si f et g sont deux fonctions polynômiales de degré 6 ayant 6 racines en commun, quelle relation y-a-t-il entre ces deux fonctions. Si on ajoute que $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$, que peut-on dire de f et g?
   Que se passe-t-il si φ et ψ ne sont pas polynomiales mais s'annulent en 6 valeurs communes et sont équivalentes au voisinage de $+\infty$?
3. Démontrer que si f et g sont deux fonctions polynômiales qui coïncident sur un intervalle non réduit à un point alors $f = g$ partout et f et g ont les mêmes coefficients. Ce résultat est-il vrai si φ ou ψ n'est pas polynomiale ?

1] 1ère démo : dans le cours

2ème démo soit P tq $\deg P = 2n+1$ tq $n \in \mathbb{N}$.

Alors $\tilde{P}$ est continue sur $\mathbb{R}$

et $\tilde{P}(t) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{codom}(P)\, t^{2n+1}$ $(\neq 0)$.

Donc $\lim_{t \to +\infty} \tilde{P}(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si codom} P > 0 \\ -\infty & \text{si codom} P < 0 \end{cases}$

et $\lim_{t \to -\infty} \tilde{P}(t) = \begin{cases} -\infty & \text{si codom} P > 0 \\ +\infty & \text{si codom} P < 0 \end{cases}$

Donc $\tilde{P}$ prend une valeur positive et une valeur négative. Ainsi le TVI assure que $\tilde{P}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Donc $\boxed{P \text{ a au moins une racine réelle}}$.

2] • D'après Taylor pour les polynômes, si $\forall n, f^{(n)}(0) = 0$ et f polynomiale alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 \quad (\text{où } m \in \mathbb{N}, m \geq \deg f).$$

Ainsi $\boxed{f = 0}$.

• Par contre si φ n'est pas polynomiale alors les dérivées de φ peuvent toutes s'annuler en 0 sans que φ soit nulle. Exemple :

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2] • si f et g polynomiales de degré 6 et tq $\begin{cases} f(a_1) = g(a_1) = 0 \\ f(a_2) = g(a_2) = 0 \\ \vdots \\ f(a_6) = g(a_6) = 0 \end{cases}$ où $a_1, \dots, a_6$ sont 6 réels distincts.

Alors $f(x) = \lambda \prod_{k=1}^{6} (x - a_k)$ tq λ, μ ctes réelles non nulles.

et $g(x) = \mu \prod (x - a_k)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \alpha f(x)$ avec $\alpha = \frac{\mu}{\lambda}$ cte réelle. Ainsi, f et g sont associés.

Si de plus, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ alors nécessairement $\lambda x^6 \underset{+\infty}{\sim} \mu x^6$ et $\lambda \underset{+\infty}{\sim} \mu$. Donc $\lambda = \mu$ et $\alpha = 1$. Ainsi $\boxed{f = g}$.

• Si maintenant φ ou ψ ne sont pas polynomiales alors on ne peut rien dire....

Exemple : $\varphi(x) = x(x-\pi)(x-2\pi)(x-3\pi)(x-4\pi)(x-5\pi)$

$\psi(x) = \varphi(x) + \sin x$.

Alors φ et ψ s'annulent en $0, \pi, 2\pi, \dots, 5\pi$

et $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \psi(x)$. Mais $\varphi \neq \psi$ car $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 \neq \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$

3] • Soit $\left\{\begin{array}{l} I \text{ un intervalle contenant une infinité de réels} \\ f \text{ et } g \text{ polynomiales tq} \end{array}\right.$

$\forall x \in I,\ f(x) = g(x)$.

Alors $T = f - g$ est polynomiale et admet une infinité de racines qui sont tous les réels de I.

Ainsi, $T = 0$ et $\boxed{f = g}$

• Par ex, si φ ou ψ n'est pas polynomiale et φ et ψ coïncident sur un intervalle alors le résultat est faux ...

Par exemple :

φ non polynomiale

. $\psi(x) = x$

. $\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

ψ et φ coïncident sur l'intervalle $[0,1]$

$\forall x \in [0,1],\ \psi(x) = \varphi(x)$ et

pourtant $\underline{\psi \neq \varphi}$ car $\left\{\begin{array}{l} \psi(2) = 2 \\ \varphi(2) = 0 \end{array}\right.$