

Ex 7bis Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ de degré 5 tels que $P + 10$ soit divisible par $(X + 2)^3$ et $P - 10$ soit divisible par $(X - 2)^3$ (indication : considérer P').

Je cherche tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$
tq: $\deg P = 5$

$$(X+2)^3 \text{ divise } P+10$$

$$(X-2)^3 \text{ divise } P-10.$$

Analyse : Supposons qu'il existe un tel polynôme P . Alors $\deg P = 5$ et

• $(X+2)^3$ divise $P+10$ i.e. -2 est racine au moins triple de $P+10$ - Donc -2 est racine au moins double de $(P+10)' = P'$

• De m[^], 2 est racine au moins triple de $P-10$ donc au moins double de $(P-10)' = P'$

• Alors il existe Q polynôme tq :

$$P'(X) = (X-2)^2 (X+2)^2 Q(X).$$

• Or, $\deg P' = 4$ car $\deg P = 5$
et $\deg P' = \deg (X-2)^2 + \deg (X+2)^2 + \deg Q$

$$\text{Donc } 4 = 4 + \deg Q.$$

$$\text{Donc } \deg Q = 0$$

$$\text{Donc } Q = c = \text{cste nulle non nulle.}$$

$$\text{Ainsi, } P'(X) = c (X-2)^2 (X+2)^2.$$

$$P'(X) = c (X^2 - 4X + 4) (X^2 + 4X + 4)$$

$$P'(X) = c (X^4 - 8X^2 + 16).$$

$$\text{et } P(X) = c \left(\frac{X^5}{5} - \frac{8X^3}{3} + 16X \right) + d$$

avec d cste et c cste non nulle.

$$\text{Enfin, } \tilde{P}(-2) + 10 = 0$$

$$\text{et } \tilde{P}(2) - 10 = 0$$

$$\text{Donc } \begin{cases} c \left(\frac{(-2)^5}{5} - \frac{8(-2)^3}{3} + 32 \right) + d + 10 = 0 \\ c \left(\frac{2^5}{5} - \frac{8 \cdot 2^3}{3} + 32 \right) + d - 10 = 0 \end{cases}$$

En additionnant les 2 lignes, on a $2d = 0$ i.e. $d = 0$. Alors,

$$c \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) - 10 = 0$$

$$\text{Donc, } c = 10 \times \frac{15}{256} = \frac{75}{128}.$$

Ainsi, $P(X) = \frac{75}{128} \left(\frac{X^5}{5} - \frac{8X^3}{3} + 16X \right)$
est la seule solution possible de notre problème.

Synthèse Ce candidat convient-il?

$$\text{Prenons } P(X) = \frac{75}{128} \left(\frac{1}{5} X^5 - \frac{8}{3} X^3 + 16X \right)$$

$$\text{Alors } \deg P = 5$$

$$\text{on vérifie que } \tilde{P}(-2) + 10 = 0$$

$$(\tilde{P}+10)'(-2) = 0$$

$$(\tilde{P}+10)''(-2) = 0$$

$$\text{Donc } (X+2)^3 \text{ divise } P+10.$$

$$\text{De m[^], } (X-2)^3 \text{ divise } P-10.$$

Ainsi, notre pble admet pour unique solution le polynôme

$$P(X) = \frac{75}{128} \left(\frac{1}{5} X^5 - \frac{8}{3} X^3 + 16X \right).$$