Ex 8 Soit $P = X^3 + X^2 + 1$.

1. Justifier que P admet une racine réelle et deux racines complexes conjuguées. On ne demande pas de les déterminer. On les note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
2. Calculer $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ *et* $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$.
3. En déduire $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3$, $\frac{\alpha_2^2+\alpha_3^2}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_1^2+\alpha_3^2}{\alpha_2^2} + \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_3^2}$.

$P = X^3 + X^2 + 1$.

1] Je ne sais pas résoudre $\tilde{P}(z) = 0$. Je vais donc étudier la fonction $\tilde{P}$ pour savoir combien de racines réelles possèdent P. $\tilde{P} : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^3+t^2+1 \end{pmatrix}$.

$\tilde{P}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$,

$\tilde{P}'(t) = 3t^2 + 2t = t(3t+2)$.

t	$-\infty$	α_1	$-2/3$		0		$+\infty$
$\tilde{P}'(t)$		$+$	0	$-$	0		
$\tilde{P}(t)$	$-\infty$ ↗	0	>0	↘	1	↗	$+\infty$

D'après l'étude de $\tilde{P}$, $\tilde{P}$ s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$ et $\alpha_1 \in]-\infty, -\frac{2}{3}[$.

Alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tq $P(X) = (X-\alpha_1)Q(X)$ et $\deg Q = 2$ et Q n'a pas de racines réelles.

Donc Q a deux racines complexes conjuguées α_2 et $\alpha_3 = \overline{\alpha_2}$ non réelles.

Ainsi P a une racine réelle α_1 et deux racines cpxes conjuguées.

2] $X^3+X^2+1 = 1(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)$

$= X^3 - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)X^2 + (\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)X - \alpha_1\alpha_2\alpha_3$.

Alors par unicité des coef de P, on a :

$$\begin{cases} -\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1 \end{cases} \quad \text{ie} \quad \boxed{\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = -1 \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -1. \end{cases}}$$

3] Alors

- $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = \underbrace{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}_{=1} - 2\underbrace{(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)}_{=0}$

$\boxed{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = 1}$

- $P(\alpha_1) = 0$ ie $\alpha_1^3+\alpha_1^2+1 = 0$ donc $\alpha_1^3 = -\alpha_1^2 - 1$

De même $\alpha_2^3 = -\alpha_2^2 - 1$ et $\alpha_3^3 = -\alpha_3^2 - 1$

Donc $\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3 = -(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2) - 3$

$= -1-3$

$\boxed{\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3 = -4}$

- $\boxed{\frac{\alpha_2^2+\alpha_3^2}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_1^2+\alpha_3^2}{\alpha_2^2} + \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_3^2}}$

$= \frac{1-\alpha_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{1-\alpha_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{1-\alpha_3^2}{\alpha_3^2}$

$= \left(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_3^2}\right) - 3$

$= \frac{(\alpha_2\alpha_3)^2 + (\alpha_1\alpha_3)^2 + (\alpha_1\alpha_2)^2}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2} - 3$

$= (\alpha_2\alpha_3)^2 + (\alpha_1\alpha_3)^2 + (\alpha_1\alpha_2)^2 - 3$

$= [\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3]^2 - 2(\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2^2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_3^2\alpha_1\alpha_2) - 3$

$= -2\alpha_1\alpha_2\alpha_3[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3] - 3$

$= -2-3 = -5$