

Ex 9 Soit $P = 3X^5 - 10X^4 + 15X^3 - 15X^2 + 10X - 3$. Trouver la forme scindée de P sur $\mathbb{C}$.

Tout d'abord, je remarque que $\tilde{P}(1) = 0$ i.e. **1 est racine de P .**

Cherchons la multiplicité de 1 dans P :

$$P' = 15X^4 - 40X^3 + 45X^2 - 30X + 10 \text{ donc } \tilde{P}'(1) = 0$$

$$P'' = 60X^3 - 120X^2 + 90X - 30 \text{ donc } \tilde{P}''(1) = 0$$

$$P''' = 180X^2 - 240X + 90 \text{ donc } \tilde{P}'''(1) \neq 0.$$

J'en déduis que **1 est racine triple de P .**

Donc, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)^3 Q(X)$ et Q est le **reste** la division euclidienne de P par $(X-1)^3$.

Posons cette division pour connaître Q :

$$\begin{array}{r} 3X^5 - 10X^4 + 15X^3 - 15X^2 + 10X - 3 \\ 3X^5 - 9X^4 + 9X^3 - 3X^2 \\ \hline -X^4 + 6X^3 - 12X^2 + 10X - 3 \\ -X^4 + 3X^3 - 3X^2 + X \\ \hline 3X^3 - 9X^2 + 9X - 3 \\ 3X^3 - 9X^2 + 9X - 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} X^3 - 3X^2 + 3X - 1. \\ 3X^2 - X + 3 \end{array}$$

quotient

Donc, $P(X) = (X-1)^3 \underbrace{(3X^2 - X + 3)}_{Q(X)}.$

De plus, $\frac{1+i\sqrt{35}}{6}$ et $\frac{1-i\sqrt{35}}{6}$ sont les deux racines de Q et

$$Q(X) = 3\left(X - \frac{1+i\sqrt{35}}{6}\right)\left(X + \frac{1-i\sqrt{35}}{6}\right). \text{ Ainsi, } P(X) = 3(X-1)^3\left(X - \frac{1+i\sqrt{35}}{6}\right)\left(X + \frac{1-i\sqrt{35}}{6}\right).$$

N.B.: La multiplicité m d'une racine α est le plus petit entier tel que $\tilde{P}^{(m)}(\alpha) \neq 0$