

Ex 9 bis Montrer que $P = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et trouver sa forme scindée.

Montrons que $1, 2, \dots, n$ sont racines de P

$$P = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$$

Donc

$$\tilde{P}(1) = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$\tilde{P}(2) = 1 - 2 + 1 + 0 = 0$$

$\vdots$

Soit $k \in [1, n]$

$$\tilde{P}(k) = 1 - \frac{k}{1!} + \frac{k(k-1)}{2!} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} + 0$$

$$= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j$$

$$= (1-1)^k$$

$$= 0^k$$

$$= 0 \quad \text{car } k \geq 1$$

Donc P admet $1, 2, \dots, n$ comme racines.

Or, $\deg P = \deg \left((-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} \right) = n$

Donc, les racines $1, 2, \dots, n$ sont les seules racines de P et ces racines

sont toutes simples et P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et

$$P = \text{codom}(P) \times \prod_{k=1}^n (X - k)$$

$$\text{De plus } \text{codom} P = \text{codom} \left(\frac{(-1)^n x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} \right) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\text{Ainsi } P_n = \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=1}^n (X - k)$$

les termes suivants contiennent tous un facteur $(k-k) = 0$.

(con) P est une somme de polynômes tous de degré distinct

$$\deg 1 < \deg \frac{x}{1!} < \deg \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} < \dots < \deg \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$$

Donc le degré de P est donné par le terme de plus haut degré de cette somme