Ex10 Factorisation et application Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$. Factoriser P sous forme scindée dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire $\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right)$ puis $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}$.

Cherchons la forme scindée de P dans $\mathbb{C}[X]$

- Pour cela, cherchons toutes les racines complexes de P. Résolvons donc l'équation $\tilde{P}(z)=0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ - Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\tilde{P}(z)=0 \iff \boxed{1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0} \iff \begin{cases} \frac{1-z^n}{1-z}=0 & \text{si } z\neq 1 \\ n=0 & \text{si } z=1 \end{cases}$$

somme géométrique de raison z

impossible donc $z \neq 1$

$$\iff z\neq 1 \text{ et } 1-z^n=0$$

$$\iff z \neq 1 \text{ et } z^n = 1$$

$\iff$ z est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité différente de 1

$$\boxed{\tilde{P}(z)=0 \iff \exists k \in [\![1, n-1]\!] / z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

- Ainsi, j'ai trouvé n-1 racines distinctes de P qui sont les cpxes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ tq $k \in [\![0, n-1]\!]$. Or, $P \neq 0$ et $\deg P = n-1$. Donc ces n-1 racines sont toutes simples dans P et P est scindé sur $\mathbb{C}$

Théo68 - si $\deg P = \sum_{i=1}^{s} m_i$ et $\forall k \in [\![1, s]\!]$, α_k racine de P de multiplicité au moins m_k alors P est scindé, $\forall k$, m_k est la mult. exacte de α_k dans P et $P = \text{codom}(P) \prod_{k=1}^{s} (X-\alpha_k)^{m_k}$.

et

$$P = \underbrace{\text{codom}(P)}_{=1} \times \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

$$\boxed{P = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}$$

la forme scindée de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Calculons $A_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right)$ et $B_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

- $A_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(-\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right)$

$$A_n = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = (-1)^{n-1}\tilde{P}(1)$$

Donc $\boxed{A_n = (-1)^{n-1} n}$

D'autre part,

$$\boxed{e^{i\theta}-1 = 2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

identité du Losange

- $A_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(2i\sin\frac{k\pi}{n} e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$

$$= (2i)^{n-1}\left(\prod_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\left(\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$$

$$= 2^{n-1} i^{n-1} B_n e^{\sum_{k=0}^{n-1} i\frac{k\pi}{n}} \qquad e^a \times e^b = e^{a+b}.$$

Or, $\sum_{k=1}^{n-1} i\frac{k\pi}{n} = i\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k = i\frac{\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{i(n-1)\pi}{2}$

Donc,

$$A_n = 2^{n-1} i^{n-1} e^{i(n-1)\frac{\pi}{2}} B_n \overset{e^{ab}=(e^a)^b}{=} 2^{n-1} i^{n-1} \left(\underbrace{e^{i\pi/2}}_{=i}\right)^{n-1} B_n$$

$$= 2^{n-1}(i^{n-1})^2 B_n = 2^{n-1}(i^2)^{n-1}B_n$$

$$A_n = 2^{n-1}(-1)^{n-1}B_n$$

Ainsi, $B_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} A_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}(-1)^{n-1} n$

$$\boxed{B_n = \frac{n}{2^{n-1}}}$$