

Ex 10 Factorisation et application Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $P = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$ . Factoriser  $P$  sous forme scindée dans  $\mathbb{C}[X]$ . En déduire  $\prod_{k=1}^{n-1} (e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1)$  puis  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$ .

Cherchons la forme scindée de  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$

Pour cela, cherchons toutes les racines complexes de  $P$ . Résolvons donc l'équation

$\tilde{P}(z) = 0$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C} - \text{noté } z \in \mathbb{C}$ .

$$\tilde{P}(z) = 0 \Leftrightarrow 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-z^n}{1-z} = 0 & \text{si } z \neq 1 \\ m=0 & \text{si } z=1 \end{cases}$$

impossible donc  $z \neq 1$

$\Rightarrow z \neq 1$  et  $1 - z^n = 0$   
 $\Rightarrow z \neq 1$  et  $z^n = 1$   
 $\Rightarrow z$  est une racine  $n$  ième de l'unité différente de 1

$$\tilde{P}(z) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \{1, \dots, n-1\} / z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

Ainsi, j'ai trouvé  $n-1$  racines distinctes de  $P$  qui sont les cpxes  $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$   $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$ . Or,  $P \neq 0$  et  $\deg P = n-1$ .

Donc ces  $n-1$  racines sont toutes simples dans  $P$  et  $P$  est scindé sur  $\mathbb{C}$

et

$$P = \text{codom}(P) \times \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

$= 1$

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

la forme scindée de  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

Calculons  $A_n = \prod_{k=1}^{n-1} (e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1)$  et  $B_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \left( \frac{k\pi}{n} \right)$

$$A_n = \prod_{k=1}^{n-1} (e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1) = \prod_{k=1}^{n-1} (-1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

$$A_n = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = (-1)^{n-1} P(1)$$

Donc  $A_n = (-1)^{n-1} n$

Somme géométrique de raison  $z$

D'autre part, identité du losange  $e^{ia} - 1 = 2i \sin \frac{a}{2} e^{i\frac{a}{2}}$

$$A_n = \prod_{k=1}^{n-1} (2i \sin \frac{k\pi}{n} e^{i\frac{k\pi}{n}})$$

$$= (2i)^{n-1} \left( \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \right) \left( \prod_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} \right)$$

$$= 2^{n-1} i^{n-1} B_n e^{\sum_{k=1}^{n-1} i\frac{k\pi}{n}}$$

$a \cdot b = e^{a+b}$

Or,  $\sum_{k=1}^{n-1} i\frac{k\pi}{n} = i\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k = i\frac{\pi}{n} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{i(n-1)\pi}{2}$

Donc,  $A_n = 2^{n-1} i^{n-1} e^{\frac{i(n-1)\pi}{2}} B_n = 2^{n-1} i^{n-1} (e^{i\frac{\pi}{2}})^{\frac{n-1}{2}} B_n$

$$= 2^{n-1} (i^{n-1})^{\frac{n-1}{2}} B_n = 2^{n-1} (i^2)^{\frac{n-1}{2}} B_n$$

$$A_n = 2^{n-1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} B_n$$

Théorème 68 - 1  
 si  $\deg P = \sum_{i=1}^r m_i$  et  $\forall k \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\alpha_k$  racine de  $P$  de multiplicité au moins  $m_k$   
 alors  $P$  est scindé,  $\forall k$ ,  $m_k$  est la mult. exacte de  $\alpha_k$  dans  $P$  et  $P = \text{codom}(P) \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{m_k}$

Ainsi,  $B_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} A_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$

$$B_n = \frac{n}{2^{n-1}}$$