Ex 11 Soit n un entier strictement positif et $P_n = \frac{1}{2i}[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}]$.

1. Montrer que P_n appartient à $\mathbb{R}[X]$. Préciser le terme dominant de P_n.
2. Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa forme scindée.
3. Montrer qu'il existe un polynôme Q_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $P_n(X) = Q_n(X^2)$. Donner la forme développée de Q_n.
4. Factoriser Q_n sous forme scindée dans $\mathbb{R}[X]$.
5. Calculer les sommes : $S_n = \sum_{k=1}^{n} cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.
6. Prouver l'inégalité suivante : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{sin^2 x}$.
7. En déduire la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ après avoir justifier sa convergence.

1] • Mq P_n est à coef réels

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} i^k X^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-i)^k X^{2n+1-k}\right]$$

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\left[i^k - (-i)^k\right] X^{2n+1-k}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\left[i^k - (-1)^k i^k\right] X^{2n+1-k}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\underbrace{\left[1-(-1)^k\right]}_{\substack{=0 \text{ si } k \text{ pair} \\ =2 \text{ si } k \text{ impair}}} i^k X^{2n+1-k}\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}i}\left[\sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n+1 \\ \text{et } k \text{ impair}}}\binom{2n+1}{k}\cancel{2}\, i^k X^{2n+1-k}\right]$$

$$= \frac{1}{i}\left[\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1} X^{2n+1-(2p+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{i}}\left[\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(i^2)^p \cancel{i}\, X^{2(n-p)}\right]$$

$$\boxed{P_n(X) = \sum_{p=0}^{n}\underbrace{\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p}_{\in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}} X^{2(n-p)}}$$

Donc $\boxed{P_n \in \mathbb{R}[X]}$

• De plus, $\binom{2n+1}{1}(-1)^0 X^{2n} = +(2n+1)X^{2n}$

est le terme dominant de P_n i.e.

$\deg P_n = 2n$ et $\operatorname{coedom}(P_n) = 2n+1$

2] Cherchons toutes les racines complexes de P_n. $P_n(i) = \frac{1}{2i}((2i)^{2n+1} - 0^{2n+1}) = (2i)^{2n} \neq 0$

Donc i n'est pas racine de P_n. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

$$\tilde{P}_n(z) = 0 \iff (z+i)^{2n+1} = (z-i)^{2n+1}$$

$$\iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1$$

$\iff \frac{z+i}{z-i}$ est une racine $(2n+1)^{\text{ième}}$ de l'unité

$$\iff \exists k \in [\![0; 2n]\!] \,/\, \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$$

$$\iff \exists k \in [\![0; 2n]\!] \,/\, z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right) = (-i)\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right).$$

Or, $e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} = 1 \iff \frac{2k\pi}{2n+1} = 0[2\pi] \iff k \equiv 0[2n+1]$

Donc,

$$\tilde{P}_n(z) = 0 \iff \exists k \in [\![1; 2n]\!] \,/\, z = (-i)\frac{1 + e^{2ik\pi/2n+1}}{1 - e^{2ik\pi/2n+1}}$$

$$= -i\,\frac{2\cos\frac{k\pi}{2n+1}\, e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}}{-2i\sin\frac{k\pi}{2n+1}\, e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}}$$

$$= \cotan\frac{k\pi}{2n+1}.$$

Ainsi les racines de P_n sont toutes réelles et sont les $\cotan\frac{k\pi}{2n+1}$ tq $k \in [\![1; 2n]\!]$.

Or, $\forall k \in [\![1,2n]\!]$, $0 < \frac{k\pi}{2n+1} < \pi$ et la fonction cotangente est injective sur $]0,\pi[$. Donc les réels $\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ tq $k \in [\![1;2n]\!]$ sont tous distincts et sont donc $2n$ racines distinctes de P_n. Or, $\deg P_n = 2n$. Donc ces racines sont ttes simples et P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{P_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{2n}\left(X - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)}$$

3] P_n est pair

car $P_n(-X) = \frac{1}{2i}\left((-X+i)^{2n+1} - (-X-i)^{2n+1}\right)$

$$= \frac{1}{2i}\left(-(X-i)^{2n+1} + (X+i)^{2n+1}\right)$$

$$P_n(-X) = P_n(X).$$

Donc il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tq : $P_n(X) = Q_n(X^2)$.

De plus,

$$P_n(X) = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p (X^2)^{n-p}$$

$$P_n(X) = Q(X^2)$$

avec $\boxed{Q(X) = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p X^{n-p}}$

4] Cherchons les racines de Q_n.

Cherchons d'abord les racines réelles et positives.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Posons $x = \sqrt{t}$. Alors $\begin{cases} t = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$

et $\widetilde{Q_n}(t) = \widetilde{Q_n}(x^2)$

$$= \widetilde{P_n}(x).$$

Donc $\widetilde{Q_n}(t) = 0 \iff \widetilde{P_n}(x) = 0$

$\iff x$ racine positive de P_n

$\iff \exists k \in [\![1,n]\!] / x = \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$

$\iff \exists k \in [\![1,n]\!] / t = \left(\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2.$

Ainsi, Q_n a n racines réelles positives distinctes qui sont les réels $\left(\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2$ tq $k \in [\![1;n]\!]$.

Or, $\deg P = \deg Q_n \times \deg X^2$

donc $2n = \deg Q_n \times 2$ et $\deg(Q_n) = n$.

J'en déduis que Q_n est scindé sur $\mathbb{R}$, toutes ses racines sont simples, réelles et positives et

$$\boxed{Q_n(X) = \text{codom}(Q_n)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)}$$

Enfin,

$$\text{codom } P = \text{codom } Q_n \times (\text{codom}(X^2))^{\deg Q_n}$$

$$2n+1 = \text{codom}(Q_n) \times 1^n$$

Donc $\text{codom } Q_n = 2n+1$.

J'en conclus que la forme scindée de Q_n est $\boxed{Q_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)}$

5] $S_n = \sum_{k=1}^{n} \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$

$=$ somme des racines de Q_n

$= -\dfrac{\text{coef de } X^{n-1} \text{ de } Q_n}{\text{codom}(Q_n)}$

$= -\dfrac{\binom{2n+1}{3}(-1)^1}{2n+1}$

$= +\dfrac{(2n+1)!}{3!\,(2n-2)!\,(2n+1)}$

$= \dfrac{2n(2n-1)}{6}$

$$\boxed{S_n = \frac{n(2n-1)}{3}}$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + 1\right)$$

$$= S_n + n$$

$$\boxed{T_n} = \frac{n(2n-1)}{3} + n = \boxed{\frac{2n(n+1)}{3}}$$

6] Soit $x \in]0, \pi/2[$.

$\cotan^2 x \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x}$ car ts les termes sont strict^t positifs.

$\iff \sin^2 x \leq x^2 \leq \tan^2 x$ idem

$\iff \sin x \leq x \leq \tan x$

TJS VRAI sur $]0, \pi/2[$ ... (*)

Donc $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cotan^2 x \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x}$.

(*) On peut redémontrer que $f : (x \to x - \sin x)$ et $g : (x \to \tan x - x)$ sont positives sur $]0, \pi/2[$ par étude de fonctions (cf exo et cours fonct° usuelles).

7] • $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente car c'est une série de Riemann avec $\alpha > 1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$\frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc

$$\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leq \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

et par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n} \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) \leq \frac{2n(n+1)}{3}$$

$$\frac{\pi^2}{3}\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{3}\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}$$

Or, $\dfrac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n \times 2n}{(2n)^2} = \dfrac{1}{2}$

et $\dfrac{2n(n+1)}{(2n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2n \times n}{(2n)^2} = \dfrac{1}{2}$

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\pi^2}{3}\dfrac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{6} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\pi^2}{3}\dfrac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Autrement dit, $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.