

Ex 12 Soit a, b et c trois réels distincts. On pose $A(X) = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}$, $B(X) = \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)}$ et $C(X) = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$.

1) Montrer sans calcul que : $A + B + C = 1$

2) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $P = \tilde{P}(a)A + \tilde{P}(b)B + \tilde{P}(c)C$ et que cette écriture de P comme combinaison linéaire de A, B et C est unique.

1) Il y a $T = A + B + C - 1$ est le polynôme nul.

$$\deg T \leq \max(\deg A, \deg B, \deg C, \deg(1)) \leq 2$$

$$\text{De plus, } \tilde{T}(a) = \underbrace{\tilde{A}(a)}_{=1} + \underbrace{\tilde{B}(a)}_{=0} + \underbrace{\tilde{C}(a)}_{=0} - 1 = 0$$

$$\tilde{T}(b) = \underbrace{\tilde{A}(b)}_{=0} + \underbrace{\tilde{B}(b)}_{=1} + \underbrace{\tilde{C}(b)}_{=0} - 1 = 0$$

$$\tilde{T}(c) = \underbrace{\tilde{A}(c)}_{=0} + \underbrace{\tilde{B}(c)}_{=0} + \underbrace{\tilde{C}(c)}_{=1} - 1 = 0$$

Donc a, b et c sont racines distinctes de T .

T a donc plus de racines que son degré.

J'en déduis que $T = 0$.

Ainsi, $A + B + C = 1$

2) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

Il y a $T = P - \tilde{P}(a)A - \tilde{P}(b)B - \tilde{P}(c)C$ est le polynôme nul.

$$\deg T \leq \max(\deg P, \deg A, \deg B, \deg C) \leq 2$$

$$\tilde{T}(a) = \underbrace{\tilde{P}(a)}_{=0} - \underbrace{\tilde{P}(a)\tilde{A}(a)}_{=1} - \underbrace{\tilde{P}(b)\tilde{B}(a)}_{=0} - \underbrace{\tilde{P}(c)\tilde{C}(a)}_{=0} = 0$$

De même, $\tilde{T}(b) = \tilde{T}(c) = 0$ - Ainsi T possède trois racines distinctes qui sont a, b et c et a donc plus de racines que son degré.

J'en conclus que $T = 0$

Donc $P(X) = \tilde{P}(a)A(X) + \tilde{P}(b)B(X) + \tilde{P}(c)C(X)$.

Soit α, β, γ tels q $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$.

$$\text{Alors } \alpha A + \beta B + \gamma C = \tilde{P}(a)A + \tilde{P}(b)B + \tilde{P}(c)C$$

Il y a $\alpha = \tilde{P}(a), \beta = \tilde{P}(b)$ et $\gamma = \tilde{P}(c)$.

$\forall t \in \mathbb{R},$

$$\alpha \tilde{A}(t) + \beta \tilde{B}(t) + \gamma \tilde{C}(t) = \tilde{P}(a) \tilde{A}(t) + \tilde{P}(b) \tilde{B}(t) + \tilde{P}(c) \tilde{C}(t)$$

En particulier pour $t = a$, on obtient : $\alpha = \tilde{P}(a)$

puisque $\tilde{A}(a) = 1, \tilde{B}(a) = \tilde{C}(a) = 0$.

pour $t = b$, on obtient : $\beta = \tilde{P}(b)$

pour $t = c$, on obtient : $\gamma = \tilde{P}(c)$.

Donc l'unicité de l'écriture de P comme combinaison linéaire de A, B et C .

CLL Tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de A, B et C et l'écriture est la suivante :

$$P(X) = \tilde{P}(a)A(X) + \tilde{P}(b)B(X) + \tilde{P}(c)C(X).$$