

Ex 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = P^{(n)}$.

- Donner une expression de L_n . En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.
- Justifier que : pour tout $l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $X^2 - 1$ divise $P^{(l)}$.
- Montrer que : pour tout $l \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P^{(l)}$ a au moins l racines distinctes dans $] -1, 1[$. (Rolle).
- En déduire que L_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses racines sont dans $] -1, 1[$.

1] $P = (X-1)^n (X+1)^n$. Donc d'après Leibniz,

$$P^{(m)} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} ((X-1)^n)^{(k)} ((X+1)^n)^{(m-k)}$$

$$L_n = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (X-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} (X+1)^k$$

$$L_n = n! \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k$$

$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg \binom{m}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k$

$$= \deg \binom{m}{k}^2 + \deg (X-1)^{n-k} + \deg (X+1)^k$$

$$= 0 + n-k + k$$

et $\sum_{k=0}^m \text{codom} \left(\binom{m}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k \right) = n$

$$= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 \times 1 \times 1$$

$$= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 \neq 0$$

Donc $\deg L_n = m$ et $\text{codom}(L_n) = n! \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2$

D'autre part, $L_n = P^{(n)}$ donc on retire $\deg L_n = \deg P - n = 2n - n = n$

et $\text{codom}(L_n) = \frac{(2n)!}{(2n-n)!} \text{codom}(P)$

$$\text{codom}(L_n) = \frac{2n!}{n!}$$

Ainsi, $n! \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!}$.

J'en conclus que :

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$$

2] $P = (X-1)^n (X+1)^n$. Donc P admet 1 et -1 comme racines de multiplicité exactement n . Cela implique que 1 et -1 sont aussi racines de $P', P'', \dots, P^{(n-1)}$ mais ne sont pas racines de $P^{(n)}$. Par conséquent, $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$ divise $P', P'', \dots, P^{(n-1)}$ mais ne divise pas $P^{(n)}$.

3] • $\tilde{P}$ s'annule en 1 et en -1 .
 $\tilde{P}$ est dérivable donc continue sur $[-1; 1]$.
 Donc le théorème de Rolle assure de $\tilde{P}'$ s'annule en un réel $c_{11} \in]-1, 1[$.

• $\tilde{P}'$ s'annule en -1 , en c_{11} et en 1 .
 $\tilde{P}'$ est dérivable donc continue sur $[-1; c_{11}]$ et sur $[c_{11}; 1]$.

Donc le théorème de Rolle assure de $\tilde{P}''$ s'annule en $c_{21} \in]-1, c_{11}[$ et en $c_{22} \in]c_{11}, 1[$.

• De même, $\tilde{P}'''$ s'annule 3 fois en $c_{31} \in]-1, c_{21}[$, en $c_{32} \in]c_{21}, c_{22}[$ et en $c_{33} \in]c_{22}, 1[$.

(...)

On peut itérer ce procédé jusqu'à $\tilde{P}^{(n)}$.

puisque -1 et 1 sont racines de $p^{(l)}$
pour $l \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$. On obtient alors
que $\forall l \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $p^{(l)}$ s'annule l
fois dans $] -1; 1[$.

4) En particulier, $L_m = P^{(m)}$ s'annule
 m fois sur $] -1; 1[$. Comme $\deg(L_m) = m$,

je peux dire que ces m valeurs d'annulation
sont les seules racines de L_m et elles
sont toutes simples et L_m est scindé sur
 $\mathbb{R}$ et toutes ses racines sont dans $] -1; 1[$.