Ex 14 Soit $n\in\mathbb{N}$. On va étudier l'existence et les propriétés des polynômes P_n tels que : $\forall t\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$$\tilde{P}_n\left(t+\frac{1}{t}\right)=t^n+\frac{1}{t^n}$$

1. Montrer que si P_n existe alors P_n est unique.
2. Justifier que $P_0(X)=2$ et $P_1(X)=X$ puis en développant $\left(t+\frac{1}{t}\right)^2$, déterminer $P_2(X)$.
3. Montrer que : pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n existe et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P_{n+2}(X)=X.P_{n+1}(X)-P_n(X)$.
4. Déterminer le degré de P_n et son terme de plus haut degré .
5. Montrer que P_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et déterminer sa forme scindée
6. En utilisant les résultats précédents, donner les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$.

1] Je suppose qu'il existe deux polynômes P et Q tq : $\forall t\in\mathbb{C}^*$, $\tilde{P}\left(t+\frac{1}{t}\right)=t^n+\frac{1}{t^n}$ et $\tilde{Q}\left(t+\frac{1}{t}\right)=t^n+\frac{1}{t^n}$.

Mq $P=Q$ et pour cela, prouvons que $T=P-Q=0$

- T polynôme.
- $\forall t\in\mathbb{C}^*$, $\tilde{T}\left(t+\frac{1}{t}\right)=\tilde{P}\left(t+\frac{1}{t}\right)-\tilde{Q}\left(t+\frac{1}{t}\right)$ $=0$

Donc, tous les réels de la forme $t+\frac{1}{t}$ tq $t\in\mathbb{R}^*$ sont racines de T.

Or, une étude rapide de la fonction $f:\left(\begin{array}{l}\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\\ t\mapsto t+\frac{1}{t}\end{array}\right)$ montre que $[2,+\infty[\subset f(\mathbb{R}^*)$

Cela implique que $f(\mathbb{R}^*)$ contient une infinité de valeurs. Autrement, l'ensemble des réels $t+\frac{1}{t}$ tq $t\in\mathbb{R}^*$ est infini. Donc T a une infinité de racines. Ainsi T est le polynôme nul ie $P=Q$.

Donc $\boxed{\text{si } P_n \text{ existe alors il est unique}}$.

2]. $t^0+\frac{1}{t^0}=2=\tilde{P}_0\left(t+\frac{1}{t}\right)$ où $P_0=2$

- $t^1+\frac{1}{t^1}=t+\frac{1}{t}=\tilde{P}_1\left(t+\frac{1}{t}\right)$ où $P_1(X)=X$
- $t^2+\frac{1}{t^2}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2=\tilde{P}_2\left(t+\frac{1}{t}\right)$

où $\boxed{P_2(X)=X^2-2}$.

3] Mq : ["P_n existe"] $=H_n$

- init P_0, P_1, P_2 existent

Donc H_0, H_1, H_2 sont vraies

De plus, $P_2=X^2-2=XP_1(X)-P_0$.

- propag Soit $n\in\mathbb{N}$. Je suppose que H_n et H_{n+1} sont vraies et sous cette hypothèse double je vais prouver que H_{n+2} vraie.

Par hypo de recurrence, P_n et P_{n+1} existent

Alors Posons $Q=XP_{n+1}-P_n$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}\left(t+\frac{1}{t}\right)&=\left(t+\frac{1}{t}\right)\tilde{P}_{n+1}\left(t+\frac{1}{t}\right)-\tilde{P}_n\left(t+\frac{1}{t}\right)\\&=\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t^{n+1}+\frac{1}{t^{n+1}}\right)-\left(t^n+\frac{1}{t^n}\right)\\&=t^{n+2}+\frac{1}{t^n}+t^n+\frac{1}{t^{n+2}}-t^n-\frac{1}{t^n}\\&=t^{n+2}+\frac{1}{t^{n+2}}\end{aligned}$$

Donc $P_{n+2}=Q$ convient.

Ainsi $H(n), H(n+1)\Rightarrow H(n+2)$

CCL : $\forall n\in\mathbb{N}$, $H(n)$ vraie par le théorème de recurrence double.

De plus,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases}P_{n+2}(X)=XP_{n+1}(X)-P_n(X)\\ P_0=2\\ P_1=X\end{cases}$$

$P_0 = 2$
$P_1 = X$
$P_2 = X^2 - 2$
$P_3 = X(X^2-2) - X = X^3 - 3X$
$P_4 = X(X^3-3X) - X^2 + 2 = X^4 - 4X^2 + 2$

Conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\deg P_n = n \text{ et } \operatorname{codom}(P_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}}$ $H(n)$

init $H(1), \dots, H(4)$ vraies

propag Soit $n \geq 4$. Je suppose $H(n)$ et $H(n+1)$ vraies et sous cette hypo, je vais mq $H(n+2)$ vraie.

$P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$

et $\begin{cases} \deg XP_{n+1} = \deg X + \deg P_{n+1} = 1 + n + 1 = n+2 & \text{car } H(n+1) \text{ vraie} \\ \deg(-P_n) = \deg P_n = n & \text{car } H(n) \text{ vraie.} \end{cases}$

Comme $n+2 > n$, $\deg P_{n+2} = n+2$ et

$\operatorname{codom} P_{n+2} = \operatorname{codom} XP_{n+1} =$
$= (\operatorname{codom} X)(\operatorname{codom} P_{n+1})$
$= 1$ OK.

Donc $(H(n), H(n+1) \Longrightarrow H(n+2))$.

cl $\forall n \in \mathbb{N}$, $H(n)$ vraie par le théo de récurrence double.

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, X^n \text{ est le terme dominant de } P_n.}$

5] Cherchons les racines de P_n pour $n \geq 1$

Cherchons tout d'abord celle de la forme $t + \frac{1}{t}$ tq $t \in \mathbb{C}^*$

Soit $t \in \mathbb{C}^*$,

$t + \frac{1}{t}$ est racine de $P_n \iff \tilde{P}_n\left(t + \frac{1}{t}\right) = 0$

$\iff t^n + \frac{1}{t^n} = 0$

$\iff t^{2n} + 1 = 0$

$\iff t^{2n} = -1 = e^{i\pi}$

$\iff t$ est une racine $2n^{\text{ième}}$ de -1.

$\iff \exists k \in [\![0, 2n-1]\!] \,/\, t = e^{\frac{2ik\pi}{2n}} \times e^{i\frac{\pi}{2n}}$

les racines $2n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

une racine $2n^{\text{ième}}$ particulière de $e^{i\pi}$

$\iff \exists k \in [\![0, 2n-1]\!] \,/\, t = e^{i\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\pi}$

$\boxed{\text{Donc tous les cpxes } \left(e^{i\frac{2k+1}{2n}\pi} + \frac{1}{e^{i\frac{2k+1}{2n}\pi}}\right) \text{ tq } k \in [\![0, 2n-1]\!] \text{ sont racines de } P_n.}$

Or, $e^{i\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\pi} + \frac{1}{e^{i\frac{2k+1}{2n}\pi}} = e^{i\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\pi} + e^{-i\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\pi}$

$= 2\cos\left(\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\pi\right)$

De plus $\cos\left(\frac{2(2n-1)+1}{2n}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + 2\pi\right)$ ($k = 2n-1$)
$= \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leftarrow k = 0$

$\cos\left(\frac{2(2n-2)+1}{2n}\pi\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{2n} + 2\pi\right)$ ($k = 2n-2$)
$= \cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right) \leftarrow k = 1$

$\vdots$

$\cos\left(\frac{2(2n-k)+1}{2n}\pi\right) = \cos\left(\frac{1-2k}{2n}\pi + 2\pi\right)$ ($k = 2n-k$)
$= \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \leftarrow k-1$

Ainsi $\boxed{\left\{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) / k \in [\![0, 2n-1]\!]\right\} = \left\{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) / k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$

Enfin, les réels $\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$ tq $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont tous distincts car $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $0 < \frac{2k+1}{2n}\pi < \pi$ et $\cos$ est injective sur $]0, \pi[$.

Ainsi les réels $2\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$ tq $k\in[\![0,n-1]\!]$ sont n racines distincts de P_n. Or, $\deg P_n = n$. Donc ce sont les seules racines de P_n, elles sont simples et réelles et P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{P_n = 1\times\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-2\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right)}$$ forme scindée de P.

Vérif pour $n=1$, $\left(X-2\cos\frac{\pi}{2}\right)=X=P_1$

pour $n=2$, $\left(X-2\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(X-2\cos\frac{3\pi}{4}\right)$

$=(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$

$=X^2-2$ OK.

6] $$P_5=\prod_{k=0}^{4}\left(X-2\cos\left(\frac{2k+1}{10}\pi\right)\right)$$

$$P_5=\left(X-2\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(X-2\cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(X-2\underbrace{\cos\frac{5\pi}{10}}_{=0}\right)\left(X-2\underbrace{\cos\frac{7\pi}{10}}_{=-\cos\frac{3\pi}{10}}\right)\left(X-2\underbrace{\cos\frac{9\pi}{10}}_{=-\cos\frac{\pi}{10}}\right)$$

$$P_5=\left(X-2\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(X+2\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(X-2\cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(X+2\cos\frac{3\pi}{10}\right)X.$$

les racines de P_5.

D'autre part,

$$P_5=XP_4-P_3=X(X^4-4X^2+2)-X^3+3X=X^5-5X^3+5X=(X^4-5X^2+5)X$$

$$P_5=\left(X^2-\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X^2-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)X$$

$$P_5=\left(X-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)X.$$

Ainsi par unicité de la forme scindée $\left\{2\cos\frac{\pi}{10}, -2\cos\frac{\pi}{10}, 2\cos\frac{3\pi}{10}, -2\cos\frac{3\pi}{10}, 0\right\}$

$$=\left\{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, 0\right\}$$

Or, $-2\cos\frac{\pi}{10}<-2\cos\frac{3\pi}{10}<0<2\cos\frac{3\pi}{10}<2\cos\frac{\pi}{10}$ et $-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}<-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}<0<\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}<\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

Donc nécessairement, $\boxed{\cos\frac{\pi}{10}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \text{ et } \cos\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}$