Ex 1

1. Déterminer un polynôme U de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ qui admet $1+\sqrt{2}$ comme racine.
2. Soit $P = 2X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X - 4$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par U.
3. En déduire $P(1+\sqrt{2})$

$\boxed{1}$ On sait que :

$p = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = -1 \in \mathbb{Z}$

$s = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 2 \in \mathbb{Z}$

$(\alpha + \sqrt{\beta})(\alpha - \sqrt{\beta}) = \alpha^2 - \beta$. quantités conjuguées l'une de l'autre.

Par conséquent, le polynôme U tel que :

$$\boxed{U = (X-(1+\sqrt{2}))(X-(1-\sqrt{2})) = X^2 - \underbrace{s}_{\in\mathbb{Z}}X + \underbrace{p}_{\in\mathbb{Z}}}$$

$(X-a)(X-b) = X^2 - (a+b)X + ab.$

est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et admet $1+\sqrt{2}$ comme racine.

$(X-a)$ divise $U \Leftrightarrow a$ racine de U.

2) $P = 2X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X - 4$

et $U = X^2 - 2X - 1$.

Posons la division euclidienne de P par U :

$$\begin{array}{r|l}
2X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X - 4 & X^2 - 2X - 1 \\ \hline
-(2X^5 - 4X^4 - 2X^3) & 2X^3 + 3 \\ \cline{1-1}
3X^2 - 5X - 4 & \\
-(3X^2 - 6X - 3) & \\ \cline{1-1}
X - 1 &
\end{array}$$

Donc $\boxed{P = \underbrace{(2X^3+3)}_{\text{quotient}}U(X) + \underbrace{X-1}_{\text{reste}}}$.

si $P = QU + R$ alors $\tilde{P} = \tilde{Q}\tilde{U} + \tilde{R}$

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\tilde{P}(t) = (2t^3+3)\tilde{U}(t) + t - 1$

En particulier pour $t = 1+\sqrt{2}$,

$$\boxed{\tilde{P}(1+\sqrt{2})} = \underbrace{(2t^3+3)\underbrace{\tilde{U}(1+\sqrt{2})}_{=0}}_{=0} + 1+\sqrt{2}-1 = \boxed{\sqrt{2}}$$