

COURS TD 15.3

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant • possède au moins **une racine complexe**.

- a exactement **$\deg(P)$ racines comptées avec leur multiplicité**.
- est **scindé** sur $\mathbb{C}$.

Pour obtenir cette forme scindée sur $\mathbb{C}$,

1. Je cherche les (resp. des) racines (resp. évidentes) de P
2. Je les compte et compare ce nombre avec $\deg(P)$ et /ou j'étudie leur multiplicité dans P . Je m'arrête dès que le nbre de racines comptées avec leur multiplicité est supérieur ou égal à $\deg(P)$.
3. J'écris la forme scindée sans oublier le **codom**(P) .

Tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ a un nombre **pair** de racines complexes non réelles et si P a une racine complexe ω non réelle de multiplicité m alors $\bar{\omega}$ est racine de P de multiplicité m et $(X - \omega)^m (X - \bar{\omega})^m = (X^2 - 2\operatorname{Re}(\omega)X + |\omega|^2)^m$ divise P .

Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ degré impair a **au moins une racine réelle**.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont **les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1 et ceux de degré 2 à discriminant strictement négatif**.

Tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ non constant s'écrit comme **produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$** et pour obtenir cette écriture,

1. Je factorise sous forme scindée dans $\mathbb{C}$
2. Dans cette factorisation, j'isole les facteurs à racines réelles.
3. Dans cette factorisation, je regroupe les facteurs à racines complexes non réelles conjuguées et je développe comme ceci : $(X - \omega)^m (X - \bar{\omega})^m = (X^2 - 2\operatorname{Re}(\omega)X + |\omega|^2)^m$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Les racines $N^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont **les N complexes** : $e^{\frac{2ik\pi}{N}}$ tq $N \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$

Si $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ ($r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$) alors les racines $N^{\text{ièmes}}$ de a sont **les N complexes** :

$$\underbrace{\sqrt[N]{r}}_{\substack{\text{une} \\ \text{racine} \\ N^{\text{ième}} \\ \text{particulière} \\ \text{de } a}} e^{\frac{i\theta}{N}} \times \underbrace{e^{\frac{2ik\pi}{N}}}_{\substack{\text{racine} \\ N^{\text{ième}} \\ \text{de l'unité}}} \text{ tq } N \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$$

Si $F = \frac{A}{B}$ est une fonction rationnelle réelle, alors les étapes de sa décomposition en éléments simples sont :

1. J'effectue la division euclidienne de A par B et j'obtiens E le quotient et R le reste : $F = E + \frac{R}{B}$.
2. Je factorise B en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et je simplifie la fraction $\frac{R}{B}$ en regardant quelles racines de B sont racines de R et en simplifiant les facteurs communs correspondant aux racines communes.
3. J'écris la décomposition en éléments simples théorique de $\frac{R}{B}$ puis je cherche les valeurs des coefficients.
4. CCL: Je reviens à F : $F = E +$ décomposition de $\frac{R}{B}$ trouvée.