

Corrigé TD 14

Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Ex 1 Trouver toutes les primitives de f sur I , intervalle où f est continue :

1) $f: (x \mapsto x \operatorname{Arccos}(x))$.

3) $f: (x \mapsto \tan^3(x))$.

5) $f: (x \mapsto \sin(\ln(x)))$

2) $f: (x \mapsto \frac{\sqrt{1+x+1}}{\sqrt{1+x-1}})$.

4) $f: (x \mapsto \frac{1}{1+\sin(x)})$.

1) f est continue sur $[-1,1]$ donc admet une primitive sur cet intervalle et $F: (x \mapsto \int_0^x t \operatorname{Arccos}(t) dt)$ est la primitive de f s'annulant en 0.

$$\text{Soit } x \in]-1,1[. F(x) = \int_0^x \underbrace{t \operatorname{Arccos}(t)}_{v(t)} dt \stackrel{\substack{\text{IPP} \\ u \text{ et } v \text{ sont} \\ C^1 \text{ sur }]-1,1[\\ \text{donc sur } S_{0,x}}}{=} \left[\begin{matrix} t^2 \\ 2 \\ u(t) \end{matrix} \operatorname{Arccos}(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{t^2 (-1)}{2 \sqrt{1-t^2}} dt = \frac{x^2}{2} \operatorname{Arccos}(x) + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$\text{Or, } \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x \frac{t^2-1+1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x -\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\int_0^x \sqrt{1-t^2} dt + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \stackrel{\substack{\text{CV} \\ t=\sin(u) \\ u=\operatorname{Arccsin}(t)}}{=} -\int_0^{\operatorname{Arccsin}(x)} \sqrt{1-\sin^2(u)} \cos(u) du + \operatorname{Arccsin}(x)$$

$$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\int_0^{\operatorname{Arccsin}(x)} \sqrt{\cos^2(u)} \cos(u) du + \operatorname{Arccsin}(x) = -\int_0^{\operatorname{Arccsin}(x)} \cos^2(u) du + \operatorname{Arccsin}(x)$$

$$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\int_0^{\operatorname{Arccsin}(x)} \frac{\cos(2u)+1}{2} du + \operatorname{Arccsin}(x) = -\left[\frac{\sin(2u)}{4} + \frac{u}{2} \right]_0^{\operatorname{Arccsin}(x)} + \operatorname{Arccsin}(x)$$

$$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{\sin(2\operatorname{Arccsin}(x))}{4} - \frac{\operatorname{Arccsin}(x)}{2} + \operatorname{Arccsin}(x)$$

$$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{\operatorname{Arccsin}(x)}{2} = -\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\operatorname{Arccsin}(x)}{2}$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \in]-1,1[, F(x) = \frac{x^2}{2} \operatorname{Arccos}(x) - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{\operatorname{Arccsin}(x)}{4}$$

Comme F et $(x \mapsto \frac{x^2}{2} \operatorname{Arccos}(x) - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{\operatorname{Arccsin}(x)}{4})$ sont continues sur $[-1,1]$ et coïncident sur $] - 1,1[$, elles coïncident sur

$$[-1,1]. \text{ Ainsi, } \forall x \in [-1,1], F(x) = \frac{x^2}{2} \operatorname{Arccos}(x) - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{\operatorname{Arccsin}(x)}{4} \stackrel{\substack{\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccsin}(x)}}{=} \frac{\pi x^2}{4} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{\operatorname{Arccsin}(x)}{4} (1 - 2x^2).$$

2) $f(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+x \geq 0 \\ \sqrt{1+x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$. Donc, $Df =]-1,0[\cup]0,+\infty[$. Plaçons-nous sur l'intervalle $]0,+\infty[$. f est continue sur cet intervalle et y admet donc une primitive et $F: (x \mapsto \int_1^x f(t) dt)$ est la primitive de f s'annulant en 1.

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{1+t}+1}{\sqrt{1+t}-1} dt \stackrel{\substack{\text{CV} \\ u=\sqrt{1+t} \\ du = \frac{1}{2\sqrt{1+t}} dt \\ dt = 2u du \\ t=1 \Leftrightarrow u=\sqrt{2} \\ t=x \Leftrightarrow u=\sqrt{1+x}}}{=} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x}} \frac{u+1}{u-1} 2u du = 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x}} \frac{u^2+u}{u-1} du = 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x}} \frac{u(u-1)+2(u-1)+2}{u-1} du$$

$$F(x) = 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x}} u + 2 + \frac{2}{u-1} du = 2 \left[\frac{u^2}{2} + 2u + 2 \ln|u-1| \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x}} = 2 \left(\frac{x}{2} + 2\sqrt{1+x} + 2 \ln|\sqrt{1+x}-1| \right) + cste.$$

3) f est continue sur $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc admet une primitive sur cet intervalle et $F: (x \mapsto \int_0^x \tan^3(t) dt)$ est la primitive de f s'annulant en 0. Soit $x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$F(x) = \int_0^x \tan^3(t) dt = \int_0^x \tan^2(t) \tan(t) dt = \int_0^x (\tan^2(t) + 1 - 1) \tan(t) dt = \int_0^x (\tan^2(t) + 1) \tan(t) - \tan(t) dt$$

$$F(x) = \left[\frac{\tan^2(t)}{2} + \ln|\cos(t)| \right]_0^x = \frac{\tan^2(x)}{2} + \ln|\cos(x)| + cste.$$

4) f est continue sur $] - \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ donc admet une primitive sur cet intervalle et $F: (x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+\sin(t)} dt)$ est la primitive de f s'annulant en 0. Soit $x \in] - \frac{\pi}{2}, \pi[$.

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+\sin(t)} dt \stackrel{\substack{\text{CV} \\ \frac{t}{2} \in] - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\\ u = \tan\left(\frac{t}{2}\right) \\ du = \frac{1}{2} (1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)) dt \\ dt = \frac{2 du}{1+u^2}}}{=} \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \frac{2 du}{1+u^2} = \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{2}{(1+u)^2} dt = \left[-\frac{2}{1+u} \right]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + cste.$$

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \pi[, F(x) = -\frac{2}{1+\tan(\frac{x}{2})} + c$. De même $\forall x \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$, $F(x) = -\frac{2}{1+\tan(\frac{x}{2})} + d$. Comme F est continue en π ,

$\lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x) = c = d = \lim_{x \rightarrow \pi^+} F(x)$. Donc $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\setminus\{\pi\}$, $F(x) = -\frac{2}{1+\tan(\frac{x}{2})} + c$ et $F(\pi) = c$.

5) f est continue sur l'intervalle \mathbb{R}^{+*} donc admet une primitive sur cet intervalle et $F : (x \mapsto \int_1^x \sin(\ln(t)) dt)$ est la primitive de f s'annulant en 0.

Soit $x \in]-1, 1[$, $F(x) = \int_1^x \sin(\ln(t)) dt \stackrel{\substack{c\grave{v} \\ u=\ln(t) \\ t=e^u \\ dt=e^u du}}{=} \int_0^{\ln(x)} \sin(u) e^u du = \int_0^{\ln(x)} \text{Im}(e^{(1+i)u}) du = \text{Im} \left[\int_0^{\ln(x)} e^{(1+i)u} du \right] = F(x) =$

$\text{Im} \left\{ \left[\frac{1}{1+i} e^{(1+i)u} \right]_0^{\ln(x)} \right\} = \text{Im} \left\{ \frac{1}{1+i} e^{(1+i)\ln(x)} + ctse \right\} = \text{Im} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right] [x \cos(\ln(x)) + ix \sin(\ln(x))] + ctse \right\}$

$F(x) = \frac{1}{2} [\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))] + ctse$.

Ex 2 Pêle-mêle

1) Soit f définie que $[0,1]$ par : $f(x) = 2x$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et $f(x) = 2 - 2x$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Montrer que pour toute fonction g continue sur $[0,1]$, $\int_0^1 g(f(x))dx = \int_0^1 g(x)dx$.

Soit g une fonction continue sur $[0,1]$. Tout d'abord, on remarque que $\forall x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$. De plus, $(x \mapsto 2x)$ est continue sur $[0, \frac{1}{2}[$ et $(x \mapsto 2 - 2x)$ est continue sur $]\frac{1}{2}, 1]$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} 2x = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} 2 - 2x$. Donc f est continue sur $[0,1]$. J'en déduis

que $g \circ f$ est continue sur $[0,1]$. Par conséquent, $\int_0^1 g(f(x))dx$ et $\int_0^1 g(x)dx$ existent.

$$\int_0^1 g(f(x))dx \stackrel{\text{relation de Chasles}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} g(f(x))dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 g(f(x))dx = \int_0^{\frac{1}{2}} g(2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 g(2-2x)dx \stackrel{\substack{CV \\ u=2-2x \\ CV \\ t=2x}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) \frac{dt}{2} + \int_1^0 g(u) \left(-\frac{1}{2}\right) du$$

$$\int_0^1 g(f(x))dx = \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) \frac{dt}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) \frac{dt}{2} = \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) dt.$$

2) Montrer que si f et g sont deux fonctions réelles continues sur $[a, b]$ alors pour tout réel $\alpha \in [-2, 2]$,

$$\int_{[a,b]} f^2 - \alpha fg + g^2 \geq 0. \text{ Etudier le cas d'égalité.}$$

Soit f et g sont deux fonctions réelles continues sur $[a, b]$ et $\alpha \in [-2, 2]$. Alors, $f^2 - \alpha fg + g^2$ est continue sur $[a, b]$. Donc, $\int_{[a,b]} f^2 - \alpha fg + g^2$ existe.

$$\begin{aligned} \text{De plus, } \forall x \in [a, b], f^2(x) - \alpha f(x)g(x) + g^2(x) &= \left(f(x) - \frac{\alpha}{2}g(x)\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4}g^2(x) + g^2(x) \\ &= \underbrace{\left(f(x) - \frac{\alpha}{2}g(x)\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\frac{4 - \alpha^2}{4}\right)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{car } \alpha \in [-2, 2]}} g^2(x) \geq 0. \end{aligned}$$

Donc, $\int_{[a,b]} f^2 - \alpha fg + g^2 \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

D'après le lemme d'annulation,

$$\int_{[a,b]} f^2 - \alpha fg + g^2 = 0 \Leftrightarrow f^2 - \alpha fg + g^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [a, b], \left(f(x) - \frac{\alpha}{2}g(x)\right)^2 + \left(\frac{4 - \alpha^2}{4}\right)g^2(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [a, b], \left(f(x) - \frac{\alpha}{2}g(x)\right)^2 = 0 \text{ et } \left(\frac{4 - \alpha^2}{4}\right)g^2(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow [\alpha = \pm 2 \text{ et } \forall x \in [a, b], (f(x) - g(x))^2 = 0] \text{ ou } [\alpha \neq \pm 2 \text{ et } g(x) = 0 \text{ et } f(x) = \frac{\alpha}{2}g(x) = 0]$$

$$\Leftrightarrow [\alpha = \pm 2 \text{ et } f = g] \text{ ou } [\alpha \neq \pm 2 \text{ et } f = g = 0]$$

3) Soit $f \in C^0([0,1], [0,1])$ telle que : $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$. Montrer que f est constante égale à 0 ou 1.

On a : $0 = \int_0^1 f - \int_0^1 f^2 = \int_0^1 f(t) - f^2(t)dt = \int_0^1 f(t)(1 - f(t))dt$. Or $\forall t \in [0,1], 0 \leq f(t) \leq 1$ donc $f(t)(1 - f(t)) \geq 0$. $f(1 - f)$ est donc une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Le lemme d'annulation assure alors que $\forall t \in [0,1], f(t)(1 - f(t)) = 0$. Donc, $\forall t \in [0,1], f(t) = 0$ ou $f(t) = 1$. Autrement dit, $f([0,1]) \subset \{0,1\}$. De plus f est continue sur l'intervalle $[0,1]$, donc $f([0,1])$ est un intervalle non vide inclus dans $\{0,1\}$. Il en découle que : $f([0,1]) = \{0\}$ ou $f([0,1]) = \{1\}$. Cela signifie que f est soit constante égale à 0 ou constante égale à 1.

4) Soit f continue sur \mathbb{R} et a un réel tel que $f(a) > 0$. Justifier que : $\exists r > 0 / \int_a^{a+r} f(x)dx > 0$ et $\int_{a-r}^a f(x)dx > 0$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) > 0$. Comme $\frac{f(a)}{2} < f(a)$, le cours assure qu'il existe un réel $r > 0$ tel que : $\forall x \in [a - r, a + r], f(x) \geq \frac{f(a)}{2}$.

Alors, $\int_a^{a+r} f(x)dx \geq \int_a^{a+r} \frac{f(a)}{2} dx = \frac{f(a)}{2}r > 0$ et $\int_{a-r}^a f(x)dx \geq \int_{a-r}^a \frac{f(a)}{2} dx = \frac{f(a)}{2}r > 0$.

Ex 3 Sommes de Riemann

1. Calculer les limites quand $n \rightarrow +\infty$ de $u_n = \frac{\sqrt[2]{2} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[2n]{2^n}}{n}$, $w_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)}$, $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{k^2 + n^2}$,

$$r_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{2n} k \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ et } x_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{e^k}.$$

$$\bullet u_n = \frac{\sqrt[2]{2} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[2n]{2^n}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} \stackrel{\substack{f(x)=2^x=e^{x \ln(2)} \\ \text{somme de Riemann} \\ \text{de } f \text{ sur } [0,1]}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

$$f \text{ étant continue sur } [0,1], \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 f(t)dt = \left[\frac{1}{\ln(2)} 2^x\right]_0^1 = \frac{1}{\ln(2)}(2 - 1) = \frac{1}{\ln(2)}.$$

$$\bullet w_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)} > 0. \text{ Posons } v_n = \ln(w_n) = \ln\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \stackrel{\substack{f(x)=\ln(1+x) \\ \text{somme de Riemann} \\ \text{de } f \text{ sur } [0,1]}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

$$f \text{ étant continue sur } [0,1], \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \ln(1+t)dt = \int_1^2 \ln(u) du = [u \ln(u) - u]_1^2 = 2 \ln(2) - 1.$$

4. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}$. On reconnaîtra une somme de Riemann.
- En déduire que la suite (S_n) est aussi convergente et déterminer sa limite.

$$a. S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{-1}{k} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} = - \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} + \sum_{1 \leq k \leq 2n} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k}$$

$$S_{2n} = -2 \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} + \sum_{1 \leq k \leq 2n} \frac{1}{k} = -2 \sum_{1 \leq 2p \leq 2n} \frac{1}{2p} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = - \sum_{1 \leq 2p \leq 2n} \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$S_{2n} = - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

$$S_{2n} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\frac{k}{n}+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{k}{n}+1} + \frac{1}{2n} \stackrel{\text{de } f(x)=\frac{1}{1+x} \text{ somme de Riemann de } f \text{ entre } 0 \text{ et } 1}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt = \ln(2). \text{ De plus, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0. \text{ Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \ln(2).$$

$$S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = S_{2n} + \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}. \text{ Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \ln(2).$$

Alors comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \ln(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2)$.

5. Soit f une fonction réelle et M -lipchitzienne sur $[0,1]$ où $M \in \mathbb{R}^{+*}$. But : calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{l}{n}\right)$.

- Justifier que f admet une unique primitive F sur $[0,1]$ s'annulant en 0 et que les réels $\int_0^1 f(t) dt$, $\int_0^1 |f(t)| dt$ et $\int_0^1 f(t)F(t) dt$ existent.
- Compléter $\frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{l}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n f\left(\frac{l}{n}\right) \left[\sum_{k=1}^l f\left(\frac{k}{n}\right) \right]$. On pose $\varepsilon_{l,n} = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^l f\left(\frac{k}{n}\right) \right] - \left[\int_0^{l/n} f(t) dt \right]$.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall l \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\varepsilon_{l,n}| \leq \frac{M}{n}$. (Cf preuve du théorème des sommes de Riemann).
- En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n f\left(\frac{l}{n}\right) \varepsilon_{l,n} = 0$.
- Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{l}{n}\right) = \int_0^1 f(t)F(t) dt$.

a. f est continue sur $[0,1]$ donc $|f|$ est continue sur $[0,1]$ et f admet une primitive F sur l'intervalle $[0,1]$. Alors F est de classe C^1 donc continue sur $[0,1]$. Donc fF est continue sur $[0,1]$. Ainsi, les réels $\int_0^1 f(t) dt$, $\int_0^1 |f(t)| dt$ et $\int_0^1 f(t)F(t) dt$ existent.

$$b. \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{l}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^l f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{l}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n f\left(\frac{l}{n}\right) \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^l f\left(\frac{k}{n}\right) \right]$$

$$c. |\varepsilon_{l,n}| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^l f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^{l/n} f(t) dt \right| = \left| \sum_{k=1}^l \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=1}^l \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt \right| = \left| \sum_{k=1}^l \left[\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt \right] \right|$$

$$|\varepsilon_{l,n}| = \left| \sum_{k=1}^l \left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt \right] \right| = \left| \sum_{k=1}^l \left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right) dt \right] \right|$$

$$|\varepsilon_{l,n}| \stackrel{\text{dans } \mathbb{R}}{\leq} \sum_{k=1}^l \left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) dt \right| \stackrel{\text{I.T}}{\leq} \sum_{k=1}^l \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)| dt$$

$$|\varepsilon_{l,n}| \stackrel{\text{car } f \text{ est } M\text{-lipchitzienne}}{\leq} \sum_{k=1}^l \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M \left| \frac{k}{n} - t \right| dt = \sum_{k=1}^l \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M \left(\frac{k}{n} - t \right) dt = \sum_{k=1}^l \left[-\frac{M \left(\frac{k}{n} - t \right)^2}{2} \right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}$$

$$|\varepsilon_{l,n}| \leq \sum_{k=1}^l \frac{M}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 = \frac{M}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 l \stackrel{\text{car } l \leq n}{\leq} \frac{M}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 n \leq \frac{M}{2n} \leq \frac{M}{n}$$

d. $\left| \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n f\left(\frac{l}{n}\right) \varepsilon_{l,n} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n |\varepsilon_{l,n}| \leq \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left| f\left(\frac{l}{n}\right) \right| \frac{M}{n} = \frac{M}{n} \left[\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left| f\left(\frac{l}{n}\right) \right| \right]$. Comme $|f|$ est continue sur $[0,1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left| f\left(\frac{l}{n}\right) \right| = \int_0^1 |f(t)| dt \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n} \left[\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left| f\left(\frac{l}{n}\right) \right| \right] = 0$. Il s'en suit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n f\left(\frac{l}{n}\right) \varepsilon_{l,n} = 0$.

$$e. \varepsilon_{l,n} = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^l f\left(\frac{k}{n}\right) \right] - \left[\int_0^{l/n} f(t) dt \right] = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^l f\left(\frac{k}{n}\right) \right] - F\left(\frac{l}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{l}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n f\left(\frac{l}{n}\right) \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^l f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n f\left(\frac{l}{n}\right) \left[\varepsilon_{l,n} + F\left(\frac{l}{n}\right) \right] = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n f\left(\frac{l}{n}\right) \varepsilon_{l,n} + \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n f\left(\frac{l}{n}\right) F\left(\frac{l}{n}\right).$$

Comme fF est continue sur $[0,1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n f\left(\frac{l}{n}\right) F\left(\frac{l}{n}\right) = \int_0^1 f(t)F(t)dt \in \mathbb{R}$. Alors, en utilisant la limite obtenue au d., $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{l}{n}\right) = \int_0^1 f(t)F(t)dt$.

Ex 4 Suites d'intégrales

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t}} dt$.
 - Calculer I_0, I_1 et I_2 .
 - Etudier la monotonie et la convergence de (I_n) . Trouver sa limite.
 - Déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de (nI_n) grâce à une IPP. En déduire un équivalent simple de I_n en $+\infty$.
 - Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et vérifier la cohérence avec les limites obtenues aux questions b et c
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.
 - Calculer I_0, I_1 et I_2 .
 - Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .
 - Montrer que la suite (I_n) est convergente.
 - Déterminer la limite de I_n .
- Soit $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(t) dt$.
 - Etudier le sens de variation de (I_n) . En déduire que (I_n) est convergente.
 - Calculer $I_n + I_{n+1}$. En déduire la valeur de la limite de (I_n) .
 - Déterminer un équivalent de I_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Ex 5 Théorique...

- Soit f une fonction continue sur $[0,2]$. Objectif : calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) dx$.
 - Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n$ existe et $u_n = n \left[\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t) dt - \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt \right]$.
 - En utilisant une primitive de f , déterminer la limite de la suite u .
- Soit f une fonction réelle et continue sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que : $\int_a^c f(t) dt = \int_c^b f(t) dt$.
- Soit f une fonction réelle et continue sur $[0,1]$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x^n) dx$.

1a. Soit f une fonction continue sur $[0,2]$.

$$u_n = n \int_0^1 \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) dx = \left[n \int_0^1 f\left(x + \frac{1}{n}\right) dx \right] - n \int_0^1 f(x) dx \stackrel{CV}{\cong} \left[n \int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(u) du \right] - n \int_0^1 f(x) dx$$

$$\stackrel{Chasles}{\cong} \left[n \int_{\frac{1}{n}}^0 f(u) du + n \int_0^1 f(u) du + n \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(u) du \right] - n \int_0^1 f(x) dx = n \left[\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t) dt - \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt \right].$$

1b. 1^{ère} méthode : Soit F une primitive de f sur $[0,2]$.

$$\text{Alors, } u_n = n \left[F\left(1 + \frac{1}{n}\right) - F(1) \right] - n \left[F\left(\frac{1}{n}\right) - F(0) \right] = \left[\frac{F\left(1+\frac{1}{n}\right) - F(1)}{\frac{1}{n}} \right] - \left[\frac{F\left(\frac{1}{n}\right) - F(0)}{\frac{1}{n}} \right]. \text{ Comme } F \text{ est dérivable en 0 et en 1,}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{F(t) - F(1)}{t - 1} = F'(1) = f(1) \text{ donc par composition, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F\left(1+\frac{1}{n}\right) - F(1)}{\frac{1}{n}} = f(1), \text{ de même, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F\left(\frac{1}{n}\right) - F(0)}{\frac{1}{n}} = f'(0).$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = f(1) - f(0).$$

2^{ème} méthode : L'égalité de la moyenne assure qu'il existe $c_n \in \left[1, 1 + \frac{1}{n}\right]$ et $d_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ tel que :

$$\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t) dt = f(c_n) \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = \frac{1}{n} f(c_n) \text{ et } \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt = f(d_n) \left(\frac{1}{n} - 0\right) = \frac{1}{n} f(d_n). \text{ Donc, } u_n = f(c_n) - f(d_n).$$

Comme $c_n \in \left[1, 1 + \frac{1}{n}\right]$ et $d_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$. Alors par continuité de f en 0 et en 1, je peux conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = f(1) - f(0)$.

2. Soit f une fonction réelle et continue sur $[a, b]$. Soit $G(x) = \int_a^x f(t) dt - \int_x^b f(t) dt$.

Alors $G(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x f(t) dt = 2F(x) - F(a) - F(b)$ où F est une primitive de f sur $[a, b]$.

G est continue sur $[a, b]$ (puisque F l'est) et $G(a) = F(a) - F(b)$ et $G(b) = F(b) - F(a) = -G(a)$. Donc $G(a)$ et $G(b)$ sont de signes opposés. Alors le TVI assure qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que : $G(c) = 0$. Alors $\int_a^c f(t) dt = \int_c^b f(t) dt$.

3. Soit f une fonction réelle et continue sur $[0,1]$. Montrons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x^n) dx = f(0)$. Posons $u_n = \int_0^1 f(x^n) dx$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit $a \in]0, 1[. \forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - f(0) = \int_0^1 f(x^n) dx - f(0) = \int_0^1 f(x^n) dx - \int_0^1 f(0) dx = \int_0^1 f(x^n) - f(0) dx$$

$$u_n - f(0) = \int_0^a f(x^n) - f(0) dx + \int_a^1 f(x^n) - f(0) dx.$$

$$|u_n - f(0)| \underset{I.T}{\leq} \left| \int_0^{1-a} f(x^n) - f(0) dx \right| + \left| \int_a^1 f(x^n) - f(0) dx \right| \underset{I.T}{\leq} \int_0^{1-a} |f(x^n) - f(0)| dx + \int_a^1 |f(x^n) - f(0)| dx.$$

intégral

f est continue sur le segment $[0,1]$ donc f est bornée sur ce segment. Il existe donc un réel M tel que $\forall t \in [0,1], |f(t)| \leq M$.
Donc $\forall x \in [a, 1], |f(x^n) - f(0)| \leq |f(x^n)| + |f(0)| \leq 2M$. Alors, par croissance de l'opérateur intégral,

$$\int_a^1 |f(x^n) - f(0)| dx \leq \int_a^1 2M dx = 2M(1-a).$$

Choisissons a tel que : $2M(1-a) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Posons donc $a = \max\left(1 - \frac{\varepsilon}{4M}, \frac{1}{2}\right)$. Alors $\int_a^1 |f(x^n) - f(0)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

f est continue en 0 donc il existe $r > 0$ tel que $\forall t \in [0, r], |f(t) - f(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2a}$. Or, $\forall x \in [0, a], 0 \leq x \leq a \leq 1$ donc

$0 \leq x^n \leq a^n$. Comme $|a| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, 0 \leq a^n \leq r$ et par conséquent, $\forall n \geq N$,

$\forall x \in [0, a], 0 \leq x^n \leq r$. J'en déduis que $\forall n \geq N, \forall x \in [0, a], |f(x^n) - f(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2a}$. Alors par croissance de l'opérateur

intégral, je peux affirmer que $\forall n \geq N, \int_0^a |f(x^n) - f(0)| dx \leq \int_0^a \frac{\varepsilon}{2a} dx = \frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi, $\forall n \geq N, |u_n - f(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Je peux ainsi conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x^n) dx = f(0)$.

Ex 6 Suite $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha})_{n \geq 1}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

A. Convergence ou divergence $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha})_{n \geq 1}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et la suite (Z_n) définie par : $Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Montrer que si $\alpha \leq 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n = +\infty$

2. Montrer que si $\alpha > 0$ alors pour tout entier naturel k non nul, $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$.

a. En déduire la limite et un équivalent de (Z_n) quand $\alpha \leq 1$.

b. Montrer que la suite (Z_n) converge quand $\alpha > 1$.

Soit n entier naturel. $Z_{n+1} - Z_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$. La suite (Z_n) est strictement croissante.

1. $\forall n, Z_n \geq \frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha}$.

Or, si $\alpha < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-\alpha} = +\infty$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n = +\infty$ dès que $\alpha < 0$.

Si $\alpha = 0$ alors $Z_n = \sum_{k=1}^n 1 = n$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n = +\infty$ si $\alpha = 0$.

2. Prenons $\alpha > 0$. Posons $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Comme $\alpha > 0$, f est strictement décroissante sur \mathbb{R}^{++} .

Soit $k > 0$. $\forall t \in [k, k+1], f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ donc $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$. Alors par croissance de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} dt. \text{ Ainsi, } \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}.$$

Alors pour tout $n > 0$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$. Donc, $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{1^\alpha}$.

Ainsi, $Z_n + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - 1 \leq F(n+1) - F(1) \leq Z_n$ où F est une primitive ($t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$) sur \mathbb{R}^{++} , $F(t) = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(t) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$.

Ainsi, si $\alpha = 1$ alors $\ln(n+1) \leq Z_n \leq \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} + 1$

si $\alpha \neq 1$ alors $\frac{1}{-\alpha+1} [(n+1)^{-\alpha+1} - 1] \leq Z_n \leq \frac{1}{-\alpha+1} [(n+1)^{-\alpha+1} - 1] - \frac{1}{(n+1)^\alpha} + 1$.

Si $\alpha = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n = +\infty$.

De plus $\ln(n+1) - \frac{1}{n+1} + 1 \underset{\sim}{\sim} \ln(n+1)$

$\underset{\sim}{\sim} \ln(n+1)$ est bornée et $(\ln(n+1))$ tend vers $+\infty$ tandis que $\ln(n)$ tend vers $+\infty$ et $(\ln(1+\frac{1}{n}))$ tend vers 0

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < 0 \\ 1 & \text{si } \lambda = 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$$

2a. Si $\alpha = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n = +\infty$.

De plus, $\ln(n+1) - \frac{1}{n+1} + 1 \underset{\sim}{\sim} \ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{\sim}{\sim} \ln(n)$. Et $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{Z_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n+1) - \frac{1}{n+1} + 1}{\ln(n)}$.

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Z_n}{\ln(n)} = 1$ et ainsi, $Z_n \underset{\sim}{\sim} \ln(n)$.

Si $0 < \alpha < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{-\alpha+1} [(n+1)^{-\alpha+1} - 1] = +\infty$ donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n = +\infty$.

De plus, $\frac{1}{-\alpha+1} [(n+1)^{-\alpha+1} - 1] - \frac{1}{(n+1)^\alpha} + 1 \underset{\sim}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} n^{-\alpha+1} \underset{\sim}{\sim} \frac{1}{-\alpha+1} [(n+1)^{-\alpha+1} - 1]$. Par conséquent, $Z_n \underset{\sim}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} n^{-\alpha+1}$.

2.b. Si $\alpha > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{-\alpha+1} [(n+1)^{-\alpha+1} - 1] - \frac{1}{(n+1)^\alpha} + 1 = 1 - \frac{1}{1-\alpha} \in \mathbb{R}$ donc $(\frac{1}{-\alpha+1} [(n+1)^{-\alpha+1} - 1] - \frac{1}{(n+1)^\alpha} + 1)$ est majorée et par conséquent, (Z_n) est majorée. Comme (Z_n) est croissante, (Z_n) est convergente.

B. Limite de $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2})_{n \geq 1}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

1. Justifier que la suite (S_n) converge.

2. Prouver que si f est une fonction réelle de classe C^1 sur $[a, b]$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = 0$

3. Montrer que : $\varphi : \left(t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{\sin(t)} & \text{si } t \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} \right)$ est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on donnera une expression φ' .

4. Trouver une fonction polynomiale h de degré 2 et telle que $h(0) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi h(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall t \in [0, \pi], h(t) \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right) \varphi\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)$.
6. En déduire que : $S_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{u}{\pi} - 1\right) \varphi(u) \sin((2n+1)u) du - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt$.
7. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. $\forall n > 0, S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} > 0$. Donc la suite S est croissante. De plus, $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

Donc, $\forall n > 1, \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$. Donc $S_n \leq 2 - \frac{2}{n} \leq 2$. Donc la suite S est majorée. J'en conclus que S est convergente.

2. Soit f est une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Soit n entier naturel non nul.

• $\int_a^b f(x) \sin(nx) dx = \left[f(x) \frac{-\cos(nx)}{n} \right]_a^b - \int_a^b f'(x) \frac{-\cos(nx)}{n} dx = \frac{1}{n} f(a) \cos(na) - \frac{1}{n} f(b) \cos(nb) + \frac{1}{n} \int_a^b f'(x) \cos(nx) dx$
 (($\cos(na)$) $_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc, ($f(a)\cos(na)$) $_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. De même ($f(b)\cos(nb)$) $_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. J'en déduis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f(a) \cos(na) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f(b) \cos(nb) = 0$

• $\left| \int_a^b f'(x) \cos(nx) dx \right| \leq \int_a^b |f'(x) \cos(nx)| dx$. Or $|f'(x) \cos(nx)| = |f'(x)| |\cos(nx)| \leq |f'(x)|$.

Donc $\int_a^b |f'(x) \cos(nx)| dx \leq \int_a^b |f'(x)| dx$ et ainsi $\left| \int_a^b f'(x) \cos(nx) dx \right| \leq \underbrace{\int_a^b |f'(x)| dx}_{\text{réel indépendant de } n}$. Donc

$\left(\int_a^b f'(x) \cos(nx) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Et par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_a^b f'(x) \cos(nx) dx = 0$.

J'en conclus que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = 0$.

3. Appliquons le théorème de caractérisation d'une fonction C^1 définie par morceaux.

Posons $g(t) = \frac{t}{\sin(t)}$. g est C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ car $(t \mapsto t)$ et $(t \mapsto \sin(t))$ sont de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et \sin ne s'annule pas sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Et $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $g'(t) = \frac{\sin(t) - t \cos(t)}{\sin^2(t)}$. De plus, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(t)} = 1$ et $g'(t) \sim_0 \frac{t - \frac{t^3}{6} - t + \frac{t^3}{2} + o_0(t^3)}{t^2} \sim_0 \frac{\frac{t^3}{3}}{t^2} \sim_0 \frac{t}{3}$ donc, $\lim_{t \rightarrow 0} g'(t) = 0$.

Le critère de classe C^1 assure alors que φ est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\varphi'(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t) - t \cos(t)}{\sin^2(t)} & \text{si } t \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

4. Je cherche une fonction polynomiale h de degré 2 et telle que $h(0) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi h(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.

Je cherche donc deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \underbrace{\left[\frac{1}{n} (at^2 + bt) \sin(nt) \right]_0^\pi}_{=0} - \frac{1}{n} \int_0^\pi (2at + b) \sin(nt) dt$

$= -\frac{1}{n} \left\{ \left[(2at + b) \left(-\frac{1}{n}\right) \cos(nt) \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi 2a \cos(nt) dt \right\}$

$= -\frac{1}{n} \left\{ (2a\pi + b) \left(-\frac{1}{n}\right) (-1)^n + \frac{b}{n} + \frac{1}{n} \left[\frac{2a}{n} \sin(nt) \right]_0^\pi \right\}$

$= ((2a\pi + b)(-1)^n - b) \frac{1}{n^2}$

Or, $\frac{1}{n^2} = ((2a\pi + b)(-1)^n - b) \frac{1}{n^2} \iff (2a\pi + b)(-1)^n - b = 1 \iff \begin{cases} 2a\pi + b = 0 \\ b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2\pi} \\ b = -1 \end{cases}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$ et $h: (t \mapsto \frac{1}{2\pi} t^2 - t)$ convient.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in]0, \pi]$.

$h(t) \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right) \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(e^{ikt}) = \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right) \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n e^{ikt}\right)$.

Or, $\sum_{k=1}^n e^{ikt} = \sum_{k=1}^n (e^{it})^k \stackrel{\substack{\text{car } t \in]0, \pi] \\ \text{donc } e^{it} \neq 1}}{=} \frac{(e^{it})^n - 1}{e^{it} - 1} e^{it} = \frac{e^{int} - 1}{e^{it} - 1} e^{it} = \frac{2i \sin\left(\frac{nt}{2}\right) e^{\frac{int}{2}}}{2i \sin\left(\frac{t}{2}\right) e^{\frac{it}{2}}} e^{it} = \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)t}$

$\sum_{k=1}^n e^{ikt} = \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \left[\cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right) + i \sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right) \right]$.

Donc, $h(t) \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right) \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = t \left(\frac{1}{2\pi} t - 1\right) \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = t \left(\frac{1}{2\pi} t - 1\right) \frac{\frac{1}{2} \left[\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

$h(t) \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{1}{2} t \left(\frac{1}{2\pi} t - 1\right) \left[\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 \right] = \frac{t}{2} \left(\frac{1}{2\pi} t - 1\right) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right)$

Ainsi, $h(t) \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right) \varphi\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)$.

Pour $t = 0$, $h(0) \sum_{k=1}^n \cos(k0) = 0 = \left(\frac{0}{2\pi} - 1\right) \varphi(0) \sin\left(\frac{2n+1}{2}0\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{0^2}{2\pi} - 0\right)$.

Ainsi, $\forall t \in [0, \pi]$, $h(t) \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right) \varphi\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)$.

$$6. S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt \stackrel{\substack{\text{linéarité de} \\ \text{l'opérateur} \\ \text{intégral}}}{=} \int_0^\pi \sum_{k=1}^n h(t) \cos(kt) dt$$

$$S_n = \int_0^\pi \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right) \varphi\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt = \int_0^\pi \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right) \varphi\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt$$

$$S_n \stackrel{\substack{\text{CV} \\ u = \frac{t}{2} \\ \text{dans la 1ère} \\ \text{intégrale}}}{=} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{u}{\pi} - 1\right) \varphi(u) \sin((2n+1)u) du - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt.$$

$$7. \text{ Posons } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left(\frac{u}{\pi} - 1\right) \varphi(u) \sin(nu)}_{\theta(u)} du.$$

La fonction θ , étant le produit de deux fonctions de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors la question permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \theta(u) \sin(nu) du = 0$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{2n+1} = 0$ puisque (J_{2n+1}) est extraite de (J_n) .

J'en déduis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt = -\frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2}\right]$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$.

Ex 7 A. Dérivation de fonctions définies par un intégrale.

1. Montrer que la fonction $(x \mapsto \int_0^x \frac{\sin(xt)}{t} dt)$ est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer cette dérivée.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{1+t^8} dt$.

3. Montrer que $f : (x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}(\sqrt{t}) dt)$ est constante (par deux méthodes).

1. Soit x un réel. $g_x : (t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t})$ est continue sur \mathbb{R}^* et $\frac{\sin(xt)}{t} \sim_{t \rightarrow 0} \frac{xt}{t} = x$. Donc $\lim_{t \rightarrow 0} g_x(t) = x$, autrement dit, g_x est prolongeable par continuité en 0 par la valeur x . Donc l'intégrale de g_x sur le segment d'extrémités 0 et x existe.

Posons $I(x) = \int_0^x \frac{\sin(xt)}{t} dt$. Alors $I(0) = 0$.

Prenons $x \neq 0$. Alors, $I(x) = \int_0^x \frac{\sin(xt)}{t} dt \stackrel{\substack{\text{CV} \\ u=xt \\ du=xdx \\ t=0 \Leftrightarrow u=0 \\ t=x \Leftrightarrow u=x^2}}{=} \int_0^{x^2} \frac{\sin(u)}{\left(\frac{u}{x}\right)} \left(\frac{du}{x}\right) = \int_0^{x^2} \frac{\sin(u)}{u} du$. Comme \widetilde{g}_1 est continue sur \mathbb{R} , \widetilde{g}_1 admet

une primitive sur \mathbb{R} notée G qui est de classe C^1 sur \mathbb{R} . Alors $\forall x \neq 0, I(x) = G(x^2) - G(0)$. Comme G est de classe C^1 sur

\mathbb{R} , I est au moins de classe C^1 sur \mathbb{R}^* et $\forall x \in \mathbb{R}^*, I'(x) = 2xG'(x^2) = \frac{2x \sin(x)}{x} = 2 \sin(x)$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} I'(x) = 0$. De plus,

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} G(x^2) - G(0) = G(0) - G(0) = 0 = I(0)$ donc I est continue en 0. Ainsi le critère de classe C^1 assure que I est de

classe C^1 sur \mathbb{R} et $I'(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, I'(x) = 2 \sin(x)$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, I'(x) = 2 \sin(x)$.

4. Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{1+t^8} dt$. Posons $A(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{1+t^8} dt$

Posons $f(t) = \frac{t^2}{1+t^8}$. f est continue sur \mathbb{R} donc admet une primitive F sur \mathbb{R} . Alors $\forall x \neq 1, A(x) = \frac{1}{x-1} [F(x) - F(1)]$.

taux d'accroissement de F entre 1 et x

Comme F est dérivable en 1, je peux conclure que $\lim_{x \rightarrow 1} A(x) = F'(1) = f(1) = \frac{1}{2}$

5. Montrer que $f : (x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}(\sqrt{t}) dt)$ est constante (par deux méthodes).

$u : (t \mapsto \text{Arcsin}(\sqrt{t}))$ et $v : (t \mapsto \text{Arccos}(\sqrt{t}))$ sont continues sur $[0,1]$. Or, $\forall x \in \mathbb{R}, [0, \sin^2(x)] \subset [0,1]$ et $[0, \cos^2(x)] \subset [0,1]$.

Donc $\int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}(\sqrt{t}) dt$ et $\int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}(\sqrt{t}) dt$ existe. Donc $Df = \mathbb{R}$.

De plus $f(-x) = \int_0^{\sin^2(-x)} \text{Arcsin}(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2(-x)} \text{Arccos}(\sqrt{t}) dt = \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}(\sqrt{t}) dt = f(x)$ et

$f(x + \pi) = \int_0^{\sin^2(x+\pi)} \text{Arcsin}(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2(x+\pi)} \text{Arccos}(\sqrt{t}) dt = \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}(\sqrt{t}) dt = f(x)$.

Ainsi, f est paire et π -périodique. Nous pouvons donc étudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1ère méthode par dérivation:

Comme u et v sont continues sur $[0,1]$, u et v admettent chacune une primitive U et V sur $[0,1]$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}(\sqrt{t}) dt = U(\sin^2(x)) - U(0) + V(\cos^2(x)) - V(0)$. Comme U, V, \sin^2 et \cos^2 sont de classe C^1 sur leur propre domaine de définition, f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) U'(\sin^2(x)) - 2 \sin(x) \cos(x) V'(\cos^2(x))$$

$$f'(x) = \sin(2x)[\text{Arcsin}(\sqrt{\sin^2(x)}) - \text{Arccos}(\sqrt{\cos^2(x)})] = \sin(2x)[\text{Arcsin}(|\sin(x)|) - \text{Arccos}(|\cos(x)|)]$$

Alors, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = \sin(2x)[\text{Arcsin}(\sin(x)) - \text{Arccos}(\cos(x))] = \sin(2x)[x - x] = 0$. Donc f est constante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Et par parité et périodicité, j'en déduis que f est constante sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \text{Arcsin}(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \text{Arccos}(\sqrt{t}) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \text{Arcsin}(\sqrt{t}) + \text{Arccos}(\sqrt{t}) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} dt = \frac{\pi}{4}$$

2^{ème} méthode par changement de variables:

$$\text{Soit } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}(\sqrt{t}) dt \stackrel{\substack{t = \sin^2(u) \\ dt = 2 \sin(u) \cos(u) du \\ u = x \Rightarrow t = \sin^2(x) \\ u = 0 \Rightarrow t = 0}}{=} \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}(\sqrt{\sin^2(u)}) \cdot \sin(2u) du$$

$$\int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}(\sqrt{t}) dt = \int_0^x \text{Arcsin}(\sin(u)) \cdot \sin(2u) du = \int_0^x u \cdot \sin(2u) du$$

$$\text{De même, } \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}(\sqrt{t}) dt \stackrel{\substack{t = \cos^2(u) \\ dt = -2 \sin(u) \cos(u) du \\ u = x \Rightarrow t = \cos^2(x) \\ u = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0}}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^x \text{Arccos}(\sin(u)) \cdot (-\sin(2u)) du = \int_x^{\frac{\pi}{2}} u \cdot \sin(2u) du$$

$$\text{Donc, } f(x) = \int_0^x u \cdot \sin(2u) du + \int_x^{\frac{\pi}{2}} u \cdot \sin(2u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \cdot \sin(2u) du = \left[u \left(-\frac{1}{2}\right) \cos(2u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \cos(2u) du$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2u)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

B. Limite d'une fonction définie par un intégrale .

4. Etude de la limite en 0 des fonctions $\left(x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt\right)$ et $\left(x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\sin(2t)}{t} dt\right)$.
5. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

C. Etude de fonctions définies par un intégrale .

6. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.
 - a. Montrer que f est impaire.
 - b. Etudier les variations de f .
 - c. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
7. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$. Montrer que f est strictement croissante sur \mathbb{R}^{+*} et déterminer sa limite en 0 et sa limite en $+\infty$.
8. Soit Φ la fonction définie par : $\Phi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} dt$.
 - a. Déterminer D_Φ et calculer $\Phi(0)$.
 - b. Montrer que : $\forall x > 0, \frac{\pi}{4} e^{-2x} \leq \Phi(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x}$. En déduire la limite de Φ en $+\infty$ et la branche infinie C_Φ en $+\infty$.
 - c. Faites de même en $-\infty$.
 - d. Etudier les variations de Φ et représenter son graphe.
9. Soit $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$.
 - e. Déterminer Df . Etudier la parité de f .
 - f. Etudier la dérivabilité de f et donner une expression de $f'(x)$. Reconnaitre f .

Ex 8 Etude d'une primitive

Soit f et I les fonctions définies par : $f(t) = \frac{\text{Arctan}(2t) - \text{Arctan}(t)}{t}$ et $I(x) = \int_0^x f(t) dt$

1. Calculer $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$.
2. Montrer que I est définie, impaire et dérivable sur \mathbb{R} et déterminer une expression de $I'(x)$. Dans la suite, on cherche à justifier l'existence et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$
3. Montrer que I est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ . Que peut-on en déduire sur $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$?
4. Montrer par IAF que $\forall x \geq 0, \text{Arctan}(2x) - \text{Arctan}(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$.
5. En déduire que I est majorée sur \mathbb{R}^+ . Que peut-on en déduire sur $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$?
6. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : $\int_0^x f(t) dt = \int_x^{2x} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$.

7. Prouver, par encadrement, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \ln(2)$.

8. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$.

1) au voisinage de 0, je sais que : $\text{Arctan}(u) = u + u \underbrace{\varepsilon(u)}_{\substack{\xrightarrow{u \rightarrow 0} 0 \\ \text{par} \\ \text{composition}}}$. Donc $\text{Arctan}(2t) = 2t + 2t \underbrace{\varepsilon(2t)}_{\substack{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \\ \text{par} \\ \text{composition}}}$.

Donc, $f(t) = \frac{2t + 2t\varepsilon(2t) - t - t\varepsilon(t)}{t} = 1 + 2\varepsilon(2t) - \varepsilon(t)$. Donc, $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1$ et f est donc prolongeable par continuité en 0.

Notons \tilde{f} son prolongement. f étant continue sur \mathbb{R}^* , \tilde{f} est continue sur \mathbb{R} .

2) Alors \tilde{f} admet une unique primitive sur \mathbb{R} qui s'annule en 0 : il s'agit de I . Par conséquent, I est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$I'(x) = \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\text{Arctan}(2x) - \text{Arctan}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3) $\forall x > 0, 2x > x$ donc $\text{Arctan}(2x) > \text{Arctan}(x)$ et $\frac{\text{Arctan}(2x) - \text{Arctan}(x)}{x} > 0$.

$\forall x < 0, 2x < x$ donc $\text{Arctan}(2x) < \text{Arctan}(x)$ et $\frac{\text{Arctan}(2x) - \text{Arctan}(x)}{x} > 0$.

Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}, I'(x) > 0$. I est donc strictement croissante sur l'intervalle \mathbb{R} . Alors le théorème de limite d'une fonction monotone assure que I admet une limite en $+\infty$.

4) Soit $x > 0$. Arctan étant continue sur $[x, 2x]$ et dérivable sur $]x, 2x[$ et $\forall t \in]x, 2x[, |\text{Arctan}'(t)| = \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$, l'inégalité des accroissements finis assure que : $|\text{Arctan}(2x) - \text{Arctan}(x)| \leq \frac{|x|}{1+x^2}$ et par conséquent, $0 \leq \text{Arctan}(2x) - \text{Arctan}(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$. De plus, cette inégalité est encore vraie pour $x = 0$.

J'en conclus que $\forall x \geq 0, \text{Arctan}(2x) - \text{Arctan}(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$.

5) Alors, que $\forall x > 1, \frac{\text{Arctan}(2x) - \text{Arctan}(x)}{x} \leq \frac{1}{1+x^2}$ donc $I(x) - I(1) = \int_1^x \frac{\text{Arctan}(2t) - \text{Arctan}(t)}{t} dt \leq \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt = \text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{4}$. Ainsi, $\forall x > 1, I(x) \leq \frac{\pi}{4} + I(1)$. La fonction I est donc bornée au voisinage de $+\infty$. J'en déduis que $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$ est finie.

6) Soit $g(t) = \begin{cases} \frac{\text{Arctan}(2t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 2 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ et $h(t) = \begin{cases} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. g et h sont continues sur \mathbb{R} .

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t) dt = \int_0^x g(t) dt - \int_0^x h(t) dt$

D'après le théorème de changement de variable, en posant $u = 2t$ dans la première intégrale, on obtient :

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^{2x} g\left(\frac{u}{2}\right) \frac{du}{2} - \int_0^x h(t) dt$$

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^{2x} \frac{\text{Arctan}(u)}{u/2} \frac{du}{2} - \int_0^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$$

$$I(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^{2x} \frac{\text{Arctan}(u)}{u} du + \int_x^0 \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \stackrel{\substack{=} \\ \text{relation} \\ \text{de Chasles}}}{=} \int_x^{2x} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$$

7) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall t \in [x; 2x]$,

$$\text{Arctan}(x) \leq \text{Arctan}(t) \leq \text{Arctan}(2x)$$

$$\frac{\text{Arctan}(x)}{t} \leq \frac{\text{Arctan}(t)}{t} \leq \frac{\text{Arctan}(2x)}{t}$$

$$\underbrace{\frac{\text{Arctan}(x)}{t}}_{\varphi(t)} \leq \underbrace{\frac{\text{Arctan}(t)}{t}}_{h(t)} \leq \underbrace{\frac{\text{Arctan}(2x)}{t}}_{\beta(t)}$$

Donc par croissance de l'intégrale appliquée aux fonctions continues α, φ, g sur le segment $[x; 2x]$,

$$\int_x^{2x} \frac{\text{Arctan}(x)}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{\text{Arctan}(2x)}{t} dt. \text{ Donc,}$$

$$\text{Arctan}(x) \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \leq \text{Arctan}(2x) \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt. \text{ Donc,}$$

$$\text{Arctan}(x) [\ln(t)]_x^{2x} \leq \int_x^{2x} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \leq \text{Arctan}(2x) [\ln(t)]_x^{2x}. \text{ Donc,}$$

$$\text{Arctan}(x) [\ln(2x) - \ln(x)] \leq \int_x^{2x} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \leq \text{Arctan}(2x) [\ln(2x) - \ln(x)]. \text{ Donc,}$$

$$\text{Arctan}(x) \times \ln(2) \leq \int_x^{2x} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \leq \text{Arctan}(2x) \times \ln(2).$$

Or $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(t) = \frac{\pi}{2}$, donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(2x) = \frac{\pi}{2}$.

Et ainsi, $\int_x^{2x} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$ est encadrée par deux expressions de même limite $\frac{\pi}{2} \ln(2)$ quand x tend vers $+\infty$.

8) Puisque $\forall x > 0, I(x) = \int_x^{2x} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$, j'en déduis que $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = \frac{\pi}{2} \ln(2)$.

Ex 9 Etude de deux primitives

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^+, I(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ et $J(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1. Justifier que I et J sont définies, continues et dérivables sur \mathbb{R}^+ et donner une expression de $I'(x)$ et de $J'(x)$.

2. Démontrer que I a une limite finie L en $+\infty$.

3. Démontrer que $\forall (x, \varepsilon) \in (\mathbb{R}^+)^2, J(x) - J(\varepsilon) = \frac{1 - \cos(x)}{x} - \frac{1 - \cos(\varepsilon)}{\varepsilon} + I(x) - I(\varepsilon)$. Pourquoi a-t-on introduit ε ?

4. En déduire $J(x)$ en fonction de $I(x)$, $\cos(x)$ et x .
5. Conclure que : $J(x)$ tend aussi vers L quand $x \rightarrow +\infty$.

1. Soit $f(t) = \begin{cases} \frac{1-\cos(t)}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \end{cases}$ et $g(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. f et g sont continues sur \mathbb{R} . Donc le cours assure que I et J sont les primitives sur \mathbb{R} de respectivement I et J qui s'annulent en 0. Donc, I et J sont définies, continues et dérivables sur \mathbb{R}

$$\text{et } \forall x, I'(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ et de } J'(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

2. $\forall x, I'(x) \geq 0$. Donc I est croissante sur \mathbb{R} . alors le théorème de limite d'une fonction monotone assure que I admet une limite L en $+\infty$.

$$\forall x > 1, I(x) = \int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt + \int_1^x \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt.$$

$$\text{Or, } \forall x > 1, \forall t \in [1, x], 0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}. \text{ Donc, } 0 \leq \int_1^x \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt \leq \int_1^x \frac{2}{t^2} dt = \left[-\frac{2}{t}\right]_1^x = 2 - \frac{2}{x} \leq 2.$$

$$\forall x > 1, I(x) = \int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt + \int_1^x \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt \leq I(1) + 2. I \text{ est donc majorée et par conséquent, } L \text{ est finie.}$$

3. Soit $(x, \varepsilon) \in (\mathbb{R}^{**})^2$ tel que $\varepsilon < x$.

$$J(x) - J(\varepsilon) = \int_\varepsilon^x \frac{\sin(t)}{t} dt \stackrel{\substack{\text{IPP} \\ u(t)=1-\cos(t) \\ v(t)=\frac{1}{t} \\ u \text{ et } v \text{ sont} \\ C^1 \text{ sur } [\varepsilon, x]}}{=} \left[(1-\cos(t)) \frac{1}{t} \right]_\varepsilon^x - \int_\varepsilon^x \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt = \frac{1-\cos(x)}{x} - \frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} + I(x) - I(\varepsilon).$$

v n'est pas de classe C^1 sur $[0, x]$ mais l'est sur $[\varepsilon, x]$. C'est pour cette raison qu'on a introduit ε .

4. I et J sont continues en 0 i.e. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(\varepsilon) = J(0) = 0$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon) = I(0) = 0$; alors en passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans

l'égalité précédente, j'obtiens : $J(x) - J(0) = \frac{1-\cos(x)}{x} - 0 + I(x) - I(0)$ (puisque $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos(\varepsilon)-1}{\varepsilon} \stackrel{TA}{=} \cos'(0) = 0$). Ainsi,

$$\forall x > 0, J(x) = \frac{1-\cos(x)}{x} + I(x).$$

5. $(x \mapsto 1-\cos(x))$ est bornée et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = L$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x)$ existe et $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x) = L = \lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$.

Ex 10 INTEGRALES DE WALLIS

A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose. $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt$

1. Etablir une relation de récurrence entre W_n et W_{n-2} .
2. En déduire une expression de I_{2p} et de I_{2p+1} avec de factorielles puis de coefficients binomiaux.
3. Montrer que $nW_n W_{n-1}$ est indépendant de n et préciser sa valeur.
4. Montrer que la suite (W_n) est monotone et convergente.
5. Déterminer sa limite. (on démontrera autrement ce résultat dans le chapitre « suite »).
6. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. En déduire que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi p}}{4^p} \binom{2p}{p} = 1$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (t \mapsto (\cos(t))^n)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc W_n existe.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}. \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos(t) \in [0, 1] \text{ donc, } 0 \leq (\cos(t))^{n+1} \leq (\cos(t))^n \leq 1.$$

$$\text{Par conséquent, } 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+1} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt \text{ i.e. } 0 \leq W_{n+1} \leq W_n \leq \frac{\pi}{2}.$$

J'en déduis que la suite W est décroissante et bornée donc convergente.

2. Soit $\varepsilon \in]0, \pi[$. Je cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, |W_n| \leq \varepsilon$.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}. |W_n| = W_n = \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} (\cos(t))^n dt + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt.$$

$$\text{D'une part, } \forall t \in \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right], 0 \leq (\cos(t))^n \leq 1 \text{ donc, } 0 \leq \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} (\cos(t))^n dt \leq \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} 1 dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{D'autre part, } \forall t \in \left[\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos(t) \leq \cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) < 1 \text{ donc, } 0 \leq (\cos(t))^n \leq \left(\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^n. \text{ Or, } 0 \leq \cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) < 1 \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^n = 0^+. \text{ Par conséquent, il existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall n \geq n_0, \left|\left(\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^n\right| = \left(\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^n \leq \frac{\varepsilon}{\pi}.$$

$$\text{Alors, } \forall n \geq n_0, \forall t \in \left[\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq (\cos(t))^n \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \text{ et par croissance de l'intégrale, } 0 \leq \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt \leq \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\pi} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\pi} dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

J'en déduis que $\forall n \geq n_0, |W_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Je peux ainsi conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n (\cos(t))^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) (1 - \sin^2(t)) dt$$

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{-\sin(t) \cos^n(t)}{u'(t)} \right] \frac{\sin(t) dt}{v(t)} = W_n + \left[\frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1} \sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1} \cos(t) dt = W_n - \frac{W_{n+2}}{n+1}.$$

Donc, $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) W_{n+2} = W_n$ et ainsi, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1^{er} cas : n pair i.e. n = 2p

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2} = \left(\frac{2p-1}{2p}\right) \left(\frac{2p-3}{2p-2}\right) W_{2p-4} = \left(\frac{2p-1}{2p}\right) \left(\frac{2p-3}{2p-2}\right) \left(\frac{2p-5}{2p-4}\right) W_{2p-6} = \dots = \left(\frac{2p-1}{2p}\right) \left(\frac{2p-3}{2p-2}\right) \dots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} W_0$$

$$W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 3 \pi}{(2p)(2p-2)\dots 4 \cdot 2} \text{ car } W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$$

$$W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 3 \pi}{(2p)(2p-2)\dots 4 \cdot 2} = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots 4 \times 3 \times 2 \pi}{(2p)^2(2p-2)^2 \dots 4^2 \times 2^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{4^p [p(p-1)\dots 2 \times 1]^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2}. \text{ Ainsi, } W_{2p} = \frac{1}{4^p} \binom{2p}{p} \frac{\pi}{2}.$$

2^{èm} cas : n impair i.e. n = 2p + 1

$$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} W_{2p-1} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right) \left(\frac{2p-2}{2p-1}\right) W_{2p-3} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right) \left(\frac{2p-2}{2p-1}\right) \left(\frac{2p-4}{2p-3}\right) W_{2p-5} = \dots = \left(\frac{2p}{2p+1}\right) \left(\frac{2p-2}{2p-1}\right) \dots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} W_1$$

$$W_{2p+1} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right) \left(\frac{2p-2}{2p-1}\right) \dots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \text{ car } W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$$

$$W_{2p+1} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right) \left(\frac{2p-2}{2p-1}\right) \dots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{(2p)^2(2p-2)^2 \dots 4^2 \times 2^2}{(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots 4 \times 3 \times 2} = \frac{4^p [p(p-1)\dots 2 \times 1]^2}{(2p+1)!} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}. \text{ Ainsi, } W_{2p} = \frac{4^p}{(2p+1) \binom{2p}{p}}.$$

5. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = nW_n W_{n-1}$ et montrons que la suite t est constante.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*. t_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = (n+1) \frac{n}{n+1} W_{n-1}W_n = nW_{n-1}W_n = t_n.$$

La suite t est donc constante égale à $t_1 = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, nW_{n-1}W_n = \frac{\pi}{2}$.

6. D'après a., on sait que W est convergente. Notons L sa limite.

Alors en passant à la limite dans l'égalité $nW_{n-1}W_n = \frac{\pi}{2n}$, on obtient $L^2 = 0$ soit $L = 0$.

7. W est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$ et $nW_n W_{n+1} \leq nW_n^2 \leq nW_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

Or, $nW_n W_{n-1} = \left[\frac{n}{n+1}\right] [(n+1)W_n W_{n-1}] = \left[\frac{n}{n+1}\right] \frac{\pi}{2} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nW_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$. Alors, l'encadrement ci-dessus, permet de

conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nW_n^2 = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent, $nW_n^2 \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$. Alors, $W_n^2 \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2n}$ et par conséquent, $W_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Alors, $\frac{1}{4^p} \binom{2p}{p} \frac{\pi}{2} = W_{2n} \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4p}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$. Donc, $\binom{2p}{p} \sim_{+\infty} \frac{4^p}{\sqrt{\pi p}}$.

B. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$

- Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n$ existe et est finie.
- Etablir une relation entre J_n et J_{n+1} .
- Démontrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = W_{2(n-1)}$ et en déduire la limite de (J_n) .

1. Soit n un entier naturel non nul.

Posons $g_n(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$. g_n est continue sur l'intervalle \mathbb{R} donc d'après le cours, $f_n: (x \mapsto \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt)$ est la primitive de g_n sur \mathbb{R} qui s'annule en 0. Ainsi, f_n est définie et dérivable donc continue sur $[0,1]$ et $f_n' = g_n$ sur $[0,1]$.

$\forall t \in [0,1], f_n'(t) = g_n(t) > 0$. Donc, f_n est strictement croissante sur \mathbb{R} . Alors le théorème de limite d'une fonction monotone, f_n a une limite L_n en $+\infty$ finie ou infinie.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \forall t \in [0, x], 0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{1+t^2}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, 0 \leq \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \leq \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^1} dt = \text{Arctan}(x) \leq \frac{\pi}{2}$. Comme f_n est majorée, cette limite J_n est finie.

2. Soit n un entier naturel non nul.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \int_0^x \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^{n+1}} t dt$$

$$f_n(x) \stackrel{\text{IPP}}{=} f_{n+1}(x) + \frac{1}{2} \left\{ \left[t \left(-\frac{1}{n}\right) \frac{1}{(1+t^2)^n} \right]_0^x - \int_0^x \left(-\frac{1}{n}\right) \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \right\} = f_{n+1}(x) + \left(-\frac{1}{2n}\right) \frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{1}{2n} f_n(x)$$

Donc, $\left(1 - \frac{1}{2n}\right) f_n(x) = f_{n+1}(x) + \left(-\frac{1}{2n}\right) \frac{x}{(1+x^2)^n}$. Alors, passons à la limite quand $x \rightarrow +\infty$ dans cette égalité,

$$\left(-\frac{1}{2n}\right) \frac{x}{(1+x^2)^n} \sim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2n}\right) x^{1-2n}. \text{ Comme } 1 - 2n < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2n}\right) \frac{x}{(1+x^2)^n} = 0 \text{ et par conséquent, } \left(1 - \frac{1}{2n}\right) J_n = J_{n+1}.$$

Ainsi, $J_{n+1} = \left(\frac{2n-1}{2n}\right) J_n$.

3. Initialisation : $f_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \text{Arctan}(x)$. Donc, $J_1 = \frac{\pi}{2} = W_0$.

Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $J_n = W_{2(n-1)}$. Alors, $W_{2n} \stackrel{\text{d'après A.1.}}{=} \left(\frac{2n-1}{2n}\right) W_{2n-2} = \left(\frac{2n-1}{2n}\right) J_n = J_{n+1}$.

CCL : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = W_{2(n-1)}$ par le théorème de récurrence simple.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} W_{2(n-1)} = 0$ (car $(W_{2(n-1)})$ est extraite de W). J'en déduis que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$.

C. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in [0,1[$, $f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Justifier que f_n est bien définie sur $[0,1[$.
- Calculer f_0 et sa limite I_0 en 1^- .
- Montrer que la fonction f_n est majorée par I_0 .
- En déduire l'existence de la limite I_n de f_n en 1^- .

2. a) Montrer que la suite (I_n) est monotone et convergente.

- Trouver une relation entre f_n et f_{n-2} , pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$
- En déduire la relation $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ valable pour tout entier naturel $n \geq 2$.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = W_n$ par deux méthodes.

1a) Posons $g_n(t) = \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}$. g_n est continue sur l'intervalle $[0,1[$ donc d'après le cours, f_n est la primitive de g_n sur $[0,1[$ qui s'annule en 0. Ainsi, f_n est définie et dérivable donc continue sur $[0,1[$ et $f'_n = g_n$ sur $[0,1[$.

1b) $\forall x \in [0,1[$, $f_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \text{Arcsin}(x)$. Donc, $I_0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_0(x) = \frac{\pi}{2}$.

1c) Soit $x \in [0,1[$. $\forall t \in [0, x]$, $0 \leq \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Donc, par croissance de l'opérateur intégral, $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.
Donc, $0 \leq f_n(x) \leq \text{Arcsin}(x) \leq \frac{\pi}{2}$. Ainsi, la fonction f_n est majorée par I_0 .

1d) $\forall t \in [0,1[$, $f'_n(t) = g_n(t) \geq 0$ et $f'_n(t)$ ne s'annule qu'en 0. Donc, f_n est strictement croissante sur $[0,1[$. Alors le théorème de limite d'une fonction monotone, f_n a une limite I_n en 1^- finie ou infinie. Comme f_n est majorée, cette limite I_n est finie.

2a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x)$ et $I_{n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_{n+1}(x)$.

$\forall x \in [0,1[$, $\forall t \in [0, x]$, $t \in [0,1]$ donc, $0 \leq t^{n+1} \leq t^n$ et $0 \leq \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}$; alors, $0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$ j'en déduis que : $\forall x \in [0,1[$, $0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \leq \frac{\pi}{2}$. Donc, par passage à la limite quand $x \rightarrow 1^-$, $0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{\pi}{2}$.

La suite (I_n) est donc décroissante et minorée donc convergente.

2b) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

$$\forall x \in [0,1[$$
, $f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt = - \int_0^x t^{n-1} \frac{1}{2} \frac{(-2t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = - \left\{ [t^{n-1} \sqrt{1-t^2}]_0^x - \int_0^x (n-1) t^{n-2} \sqrt{1-t^2} dt \right\}$

$$f_n(x) = x^{n-1} \sqrt{1-x^2} + (n-1) \int_0^x t^{n-2} \frac{(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} dt = x^{n-1} \sqrt{1-x^2} + (n-1) \int_0^x \frac{t^{n-2}}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$f_n(x) = x^{n-1} \sqrt{1-x^2} + (n-1) [f_{n-2}(x) - f_n(x)]$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \in [0,1[$$
, $n f_n(x) = x^{n-1} \sqrt{1-x^2} + (n-1) f_{n-2}(x)$.

2c) Donc, par passage à la limite quand $x \rightarrow 1^-$, $nI_n = 0 + (n-1)I_{n-2}$. Ainsi, $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$.

2d) **1^{ère} méthode** : Effectuons une récurrence double pour prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = W_n$.

$$I_0 = W_0$$

$$\forall x \in [0,1[$$
, $f_1(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = - \int_0^x \frac{1}{2} \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}} dt = - [\sqrt{1-t^2}]_0^x = 1 - \sqrt{1-x^2}$. Donc, $I_1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x) = 1 = W_1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Je suppose que $W_n = I_n$ et $W_{n+1} = I_{n+1}$. Alors, $I_{n+2} = \frac{(n+1)}{n+2} I_n = \frac{(n+1)}{n+2} W_n = W_{n+2}$.

CCL : le théorème de récurrence double assure alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = W_n$.

2^{ème} méthode : Effectuons un changement de variable

$$\forall x \in [0,1[$$
, $f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt \stackrel{\text{CV}}{=} \int_0^{\text{Arcsin}(x)} \sin^n(u) du \stackrel{\substack{F \text{ \u00e9tant} \\ \text{une primitive} \\ \text{de } (u \mapsto \sin^n(u)) \\ \text{sur } [0, \frac{\pi}{2}]}}{=} F(\text{Arcsin}(x)) - F(0)$

$$\text{Donc, } I_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u) du = W_n$$
.

$$\text{Soit } \forall n, S_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \right)$$
.

a. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Qu'en déduit-on ?

b. En remarquant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\ln(2)$.

Ex 11 Inégalité de Cauchy-schwarz

A. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ à valeurs réelles et telle que $f(0) = 0$.

a) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que : $f(x)^2 \leq x \int_0^x f'(t)^2 dt$.

b) En déduire que : $\int_0^1 f(x)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x)^2 dx$.

B. Soit f et g réelles et continues sur $[0,1]$ et telles que $\int_0^1 f = 0$.

Montrer que $\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right)\left(\int_0^1 g(x)^2 dx - \left(\int_0^1 g(x)dx\right)^2\right)$.

C. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que $\inf\left\{\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right) / f \in C^\circ([a, b], \mathbb{R}^{**})\right\} = (b - a)^2$.

Ex 12 Une preuve de l'irrationalité de e

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

1. Trouver une relation entre u_n et u_{n+1} .
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$. On note $v_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$.
3. Démontrer que la suite v converge en croissant vers le réel e . On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} = e$.
4. Supposons un instant que e soit rationnel. Posons alors $e = \frac{m}{q}$ tel que m et q entiers naturels non nuls.
 - a. Montrer que $q!(e - v_q) \in \mathbb{N}^*$.
 - b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tq $n > q$, $0 < q!(v_n - v_q) \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \dots + \frac{1}{(q+1)^{n-q}}$.
 - c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tq $n > q$, $0 < q!(v_n - v_q) < \frac{1}{q}$.
 - d. En déduire que $0 \leq q!(e - v_q) \leq \frac{1}{q}$.
 - e. Conclure.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt = \frac{1}{(n+1)!} \left\{ [(1-t)^{n+1} e^t]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-t)^n e^t dt \right\}$$

$$u_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt = \frac{-1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt = \frac{-1}{(n+1)!} + u_n.$$

$\forall p \in \mathbb{N}, u_{p+1} - u_p = \frac{-1}{(p+1)!}$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{p=0}^{n-1} (u_{p+1} - u_p) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{-1}{(p+1)!}$. Et après simplification, j'obtiens :

$$u_n - u_0 = -\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(p+1)!} \text{ i.e. } u_n = u_0 - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!}. \text{ Or, } u_0 = \int_0^1 e^t dt = e - 1. \text{ Ainsi, } u_n = e - 1 - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} = e - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}.$$