

Corrigé DL Intégration (la base)

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}$. On reconnaîtra une somme de Riemann.
- En déduire que la suite (S_n) est aussi convergente et déterminer sa limite.
- Trouver une autre méthode pour justifier la convergence de (S_n) et déterminer sa limite.

$$a. S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{-1}{k} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} = -\sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k}$$

$$S_{2n} = -2 \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} + \sum_{1 \leq k \leq 2n} \frac{1}{k} = -2 \sum_{1 \leq 2p \leq 2n} \frac{1}{2p} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = -\sum_{1 \leq p \leq n} \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$S_{2n} = -\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

$$b. \text{ Alors, } S_{2n} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\frac{k}{n}+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{k}{n}+1} + \frac{1}{2n} \stackrel{\text{CV}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}$$

$f(x) = \frac{1}{1+x}$ somme de Riemann de f entre 0 et 1

Comme $f: (x \mapsto \frac{1}{1+x})$ est continue sur $[0,1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt = \ln(2)$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \ln(2)$.

$$c. S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = S_{2n} + \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}. \text{ Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \ln(2).$$

Alors comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \ln(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}$, le cours assure que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2)$.

$$e. \text{ Je reconnais } \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = P_{n,f,0}(1).$$

f est de classe C^∞ sur l'intervalle $[0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], |f^{(n+1)}(t)| = \left| \frac{(-1)^{n+1} n!}{(1+x)^{n+1}} \right| \leq n!$. Donc l'inégalité de Taylor-Lagrange assure que $|f(1) - P_{n,f,0}(1)| \leq n! \frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, j'en déduis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{n,f,0}(1) = f(1)$.

Autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

RQUE : on peut prouver que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes pour prouver la convergence de (S_n) . Par contre cela ne donne pas la valeur de la limite.

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0. \text{ Donc } (S_{2n}) \text{ est croissante.}$$

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0. \text{ Donc } (S_{2n+1}) \text{ est décroissante.}$$

De plus, $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite finie L . Alors, ces deux suites extraites de (S_n) particulières convergeant vers la même limite L , la suite (S_n) converge aussi vers cette limite L .

$$\text{Soit } f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt.$$

- Déterminer Df . Etudier la parité de f .
- Etudier la dérivabilité de f et donner une expression de $f'(x)$.
- Reconnaitre f .

$$a. \text{ Posons } g(t) = \frac{\text{Arctan}(t)}{t}. g \text{ est continue sur les deux intervalles } \mathbb{R}^{++} \text{ et } \mathbb{R}^{-*}.$$

Si $x \in \mathbb{R}^{++}$ alors $2x \in \mathbb{R}^{++}$ donc $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x g(t) dt$ existe. Si $x \in \mathbb{R}^{-*}$ alors $2x \in \mathbb{R}^{-*}$ donc $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x g(t) dt$ existe.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x)$ existe.

RQUE : g est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1 mais la borne $\frac{1}{x}$ n'est pas définie pour $x = 0$ donc il est impossible de définir $f(0)$.

Ainsi, $Df = \mathbb{R}^*$.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}^*. \text{ Alors } -x \in \mathbb{R}^* \text{ et } f(-x) = \int_{\frac{1}{-x}}^{-x} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \stackrel{\text{CV}}{=} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(-u)}{-u} (-du) = -\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(u)}{u} du = -f(x).$$

$u = -t$
 $dt = -du$
 $t = -x \Leftrightarrow u = x$
 $t = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow u = \frac{1}{x}$

Donc, f est impaire.

b. g est continue sur l'intervalle \mathbb{R}^{+*} , donc g admet une primitive G sur cet intervalle d'après le TFI. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $2x \in \mathbb{R}^{+*}$ donc le TFCI assure que : $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x g(t)dt = G(x) - G\left(\frac{1}{x}\right)$. Or sur \mathbb{R}^{+*} , $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ et G sont de classe C^1 et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^{+*}$. Donc $\left(x \mapsto G\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^{+*} . Il en découle que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^{+*} et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f'(x) = G'(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) G'\left(\frac{1}{x}\right) = g(x) + \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\text{Arctan}(x)}{x} + \frac{1}{x^2} \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \stackrel{\text{car } x > 0}{=} \frac{\frac{\pi}{2}}{x} = \frac{\pi}{2x}$$

g est continue sur l'intervalle \mathbb{R}^{-*} , donc g admet une primitive H sur cet intervalle d'après le TFI. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{-*}$, $2x \in \mathbb{R}^{-*}$ donc le TFCI assure que : $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x g(t)dt = H(x) - H\left(\frac{1}{x}\right)$. Or sur \mathbb{R}^{-*} , $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ et H sont de classe C^1 et $\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^{-*}$. Donc $\left(x \mapsto H\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^{-*} ; finalement, on peut conclure que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^{-*} et pour tout $x \in \mathbb{R}^{-*}$,

$$f'(x) = H'(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) H'\left(\frac{1}{x}\right) = g(x) + \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\text{Arctan}(x)}{x} + \frac{1}{x^2} \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \stackrel{\text{car } x < 0}{=} \frac{-\frac{\pi}{2}}{x} = -\frac{\pi}{2x}$$

c. Donc f et $\left(x \mapsto \frac{\pi}{2} \ln(x)\right)$ sont deux primitives de $\left(x \mapsto \frac{\pi}{2x}\right)$ sur l'intervalle \mathbb{R}^{+*} . J'en déduis qu'il existe une constante c réelle telle que $\forall x > 0, f(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x) + c$. Alors $c = f(1) - \frac{\pi}{2} \ln(1) \stackrel{\text{car}}{=} 0$.

$$f(1) = \int_1^1 g(t)dt = 0$$

Ainsi, $\forall x > 0, f(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x)$.

On peut faire de même sur \mathbb{R}^{-*} . On peut aussi rédiger de cette manière :

$$\text{Comme } f(-1) = \int_{-1}^{-1} g(t)dt = 0, \forall x < 0, f(x) = \int_{-1}^x f'(t)dt = \int_{-1}^x -\frac{\pi}{2t} dt = \left[-\frac{\pi}{2} \ln|t|\right]_{-1}^x = -\frac{\pi}{2} \ln|x|.$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \neq 0, f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$