Programme de colle 20

Chap13 Propriétés de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue (par morceaux).

I Définitions

1. Définition d'une subdivision , d'une fonction en escalier, de l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment.

Une subdivision de $[a,b]$ est une famille de réels $(a_k)_{k=0..n}$ $tels\ que\ a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$.
Une fonction en escalier sur $[a,b]$ est une application e de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une subdivision$(a_k)_{k=0..n}$de $[a,b]$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!], e_{/]a_k,a_{k+1}[}$est constante. Si $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall x \in]a_k, a_{k+1}[, e_{/]a_k,a_{k+1}[}(x) = \lambda_k$ alors par définition$\int_{[a,b]} e(x)dx = \int_a^b e(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (a_{k+1} - a_k)$. Cette définition est indépendante de la subdivision adaptée à e.

2. Théorème (admis) -définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue et réelle sur ce segment.

Si f est continue et réelle sur le segment $[a,b]$ alors

- il existe une suite (e_n) de fonctions en escalier sur $[a,b]$ telle que $sup_{[a,b]}|f - e_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $(**)$ et $\left(\int_a^b e_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$converge vers un réel L
- Si (e_n) est une autre suite de fonctions en escalier vérifiant $(**)$ alors $\left(\int_a^b e_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$converge aussi vers ce même réel L.
- Par définition, $\int_a^b f(x)dx = L$

3. Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction complexe

Si f est continue et complexe sur le segment $[a,b]$ alors$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b Re(f(x))dx + i\int_a^b Im(f(x))dx$.

4. Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux sur ce segment.

Une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ est une application f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une subdivision$(a_k)_{k=0..n}$de $[a,b]$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!], f_k = f_{/]a_k,a_{k+1}[}$est continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ et admet une limite finie à droite a_k en et une limite finie à gauche en a_{k+1}. Alors par définition$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \widetilde{f_k}(x)dx$). Cette définition est indépendante de la subdivision adaptée à f.

5. Définition de l'intégrale entre des bornes non croissantes .

Si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ alors par définition, $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^a f(x)dx = 0$.
Csq : Si f est continue par morceaux sur un intervalle I alors $\forall (a,b) \in I^2, \int_b^a f(x)dx$ $existe$.

II Propriétés déjà rencontrées

1. Relation de Chasles

Si f est continue (par mcx) sur l'intervalle I alors $\forall (a,b,c) \in I^2, \int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

2. Linéarité

Si f et g sont continues (par mcx) sur l'intervalle I alors $\forall (\alpha,\beta) \in K^2, \forall (a,b) \in I^2, \int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$.

3. Positivité

Si f est réelle, continue (par mcx) et positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

4. Croissance

Si f et g sont réelles, continues (par mcx) et $\forall t \in [a,b], f(t) \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

III Inégalité triangulaire

Si f est continue (par mcx) sur l'intervalle I alors $\forall (a,b) \in I^2, \left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \left|\int_a^b |f(t)|dt\right|$

IV Primitive

1. Théorème fondamental de l'intégration TFI et sa conséquence

TFI : Si f est **continue** sur un intervalle I et $a \in I$ alors $(x \mapsto \int_a^x f(t)dt)$ est une primitive de f sur I et est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a
Csq : Si f est **continue** sur un intervalle I alors f admet une primitive sur I.

2. Théorème fondamental de calcul d'une intégrale $TFCI$

Si f est **continue** sur l'intervalle I alors pour toute primitive F de f sur I , $\forall (a,b) \in I^2, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \overset{notation}{\triangleq} [F(t)]_a^b$.

3. Lien entre f et f'

Si f est **de classe C^1** sur l'intervalle I et $a \in I$ alors $\forall x \in I^2, f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$.

4. Théorème d'intégration par parties

Si f et g sont **de classe C^1** sur l'intervalle I alors $\forall (a,b) \in I^2$ $\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$.

5. Théorème de changement de variable

Si φ est de classe C^1 sur l'intervalle I et f est continue sur $\varphi(I)$ alors $\forall (a,b) \in I^2, \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

V Lemme d'annulation

1. Lemme d'annulation

Si f est **réelle, continue et positive** sur l'intervalle $[a,b]$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors $\forall x \in [a,b], f(x) = 0$.

2. Sa contraposée

Si f est **continue , réelle et positive** sur l'intervalle $[a,b]$ et $\exists x \in [a,b], f(x) \neq 0$ alors $\int_a^b f(t)dt > 0$.

VI Moyenne d'une fonction continue sur un segment

1. Définition

Lorsque f est continue (par mcx) sur $[a,b]$, la moyenne de f entre a et b est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\left(=\frac{1}{a-b}\int_b^a f(t)dt\right)$.

2. Inégalités de la moyenne

Si f est **continue et réelle** sur $[a,b]$, alors $min_{[a,b]}f \leq \frac{1}{a-b}\int_b^a f(t)dt \leq max_{[a,b]}f$.

Si f est continue (par mcx) sur l'intervalle I et bornée sur I alors $\forall(a,b)\in I^2, \left|\int_b^a f(t)dt\right| \leq sup_I|f||b-a|$.

3. Egalité de la moyenne

Si f est **continue et réelle** sur $[a,b]$ alors $\exists c\in[a,b], f(c)=\frac{1}{a-b}\int_b^a f(t)dt.$

VII Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si f et g sont **continues et réelles** sur $[a,b]$, alors $\left(\int_b^a f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_b^a f(t)^2dt\right)\left(\int_b^a g(t)^2dt\right)$.

VIII Somme de Riemann

Si f est **continue** sur $[a,b]$ alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)=\int_a^b f(t)dt$. **Cas particulier :** Si f est continue sur $[0,1]$ alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)dt$.

Chap 14 Polynômes à une indéterminée.

I Généralités

- **Définition d'un polynôme comme une suite presque nulle (nulle à partir d'un certain rang).**

Un polynôme à coefficients dans K est une suite d'éléments de K nulle à partir d'un certain rang.

- **Soit P et $Q, P_1, P_2, \dots, P_s$ des polynômes à coefficients dans $K, \lambda \in K$ et $m \in \mathbb{N}$.**
  - ✓ **Définition de $\lambda P, P+Q, PQ$.**
  - ✓ **Définition de P^m, d'une combinaison linéaire de P et Q.**

$P^0=1$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*, P^m=P^{m-1}P=\underbrace{P\times P\times\dots\times P}_{m\ fois}$

Une combinaison linéaire de P et Q est tout polynôme qui peut s'écrire sous la forme $aP+bQ$ où a et b éléments de K.

Une combinaison linéaire de $P_1, P_2, \dots, P_s$ est tout polynôme qui peut s'écrire sous la forme $\sum_{k=1}^s a_k P_k$ où $a_1,\dots,a_s$ éléments de K.

- **Définition du polynôme X. Calcul de X^k.**

$X=(0, \underbrace{1}_{rang\ 1}, 0,0,\dots\dots)$ est appelée l'indéterminée

$\forall k\in\mathbb{N}, X^k=(\underbrace{0}_{rang\ 0}, 0,\dots,0, \underbrace{1}_{rang\ k}, 0\dots\dots)$ est appelée l'indéterminée

- **Nouvelle définition (écriture sous forme développée) d'un polynôme :**

Un polynôme à coefficient dans K s'écrit de manière unique sous la forme $\underbrace{\sum_{k=0}^n a_kX^k}_{\substack{combinaison\ linéaire\\ de\ 1,X,X^2,\dots,X^n}}$ où $n\in\mathbb{N}$ et $a_0,\dots,a_n$ éléments de K sont les coefficients de P.

On note $K[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans K.

Deux polynômes sont égaux sietssi ils ont les mêmes coefficients.

Un polynôme constant est un polynôme de forme $aX^0 tq\ a\in K$ et est noté tout simplement a.

- **Nouvelle expression $\lambda P, P+Q, PQ, P^m$. Définition de $P\circ Q$. Combinaison linéaire de polynômes.**

Soit P et Q éléments de $K[X]$, $\lambda\in K$ tels que $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k$ et $Q=\sum_{k=0}^m b_kX^k$.

$\lambda P=\sum_{k=0}^n \lambda a_kX^k$.

$P+Q=\sum_{k=0}^{\max(n,m)}(a_k+b_k)X^k$.

$PQ=\sum_{k=0}^{n+m} c_kX^k$ où $c_k=\sum_{j=0}^k a_jb_{k-j}$.

$P\circ Q=\sum_{k=0}^n a_kQ^k$

- **Propriétés des opérations (règles de calcul) : élément neutre, opposé, associativité, commutativité, distributivité, calcul de X^kX^p et $(X^k)^p$.**
- **Définition du degré d'un polynôme, du coefficient dominant et terme dominant lorsqu'ils existent.**

Soit $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k\in K[X]$.

Si $P=0$ alors d°P $=\deg(P)=-\infty$ et P n'a pas de coefficient dominant ni de terme dominant.

Si $P\neq 0$ alors d°P $=\deg(P)=\{k/a_k\neq 0\}$ et $codom(P)=a_{\deg(P)}$ et terme domominant de $P=a_{\deg(P)}X^{\deg(P)}$

- **Formules des degrés de $P+Q, PQ, \beta P$ et $P\circ Q$ et formule sur les coefficients dominants lorsqu'ils existent. Généralisation à un produit ou une combinaison linéaire de m polynômes, à une puissance de polynôme.**

Soit P et Q, $P_1, P_2, \dots, P_s$ éléments de $K[X]$, $\lambda\in K$ tels que $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k$ et $Q=\sum_{k=0}^m b_kX^k$.

$\deg(\lambda P)=\begin{cases}\deg(P)\ si\ \lambda\neq 0\\ -\infty\ si\ \lambda=0\end{cases}$. Et le cas échéant, $\mathrm{codom}(\lambda P)=\lambda\mathrm{codom}(P)$.

$\deg(P+Q)\leq\max(\deg(P),\deg(Q))$.

$\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$. Et le cas échéant, $\mathrm{codom}(PQ)=\mathrm{codom}(P)\,\mathrm{codom}(Q)$.

$\forall k\in\mathbb{N}$, $\deg(P^k)=k\deg(P)$

$\deg\left(\prod_{j=1}^s P_j\right)=\sum_{j=1}^s\deg(P_j)$. Et le cas échéant, $\mathrm{codom}\left(\prod_{j=1}^s P_j\right)=\prod_{j=1}^s codom(P_j)$.

$\deg\left(\sum_{j=1}^s P_j\right)\leq\max(\deg(P_1),\deg(P_2),\dots,\deg(P_s))$. Et si l'un des polynômes $P_1, P_2, \dots, P_s$ a un degré strictement supérieur à tous les autres alors $\deg\left(\sum_{j=1}^s P_j\right)$ est égal au degré de ce polynôme et $\mathrm{codom}\left(\sum_{j=1}^s P_j\right)$ est égal au coefficient dominant de ce polynôme.

$\deg(P\circ Q)=\deg(Q)\times\deg(P)$ si Q non constant;

- **Intégrité du produit polynomial**

Soit P et Q éléments de $K[X]$. $PQ=0 \Leftrightarrow P=0$ ou $Q=0$.

- **Ensemble note $K_n[X]$**

Soit n un entier naturel. On note $K_n[X]$ l'ensemble des polynômes (à une indéterminée) à coefficient dans K et de degré inférieur ou égal à n .
Un polynôme de $K_n[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ i.e. comme combinaison linéaire des X^k tq $k \in [\![0, n]\!]$

II Polynômes dérivés

- **Définition des polynômes dérivés successifs.**

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. $P^{(1)} = P' = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} & \text{si } \deg(P) \geq 1. \\ 0 & si \deg(P) \leq 0. \,(i.e. P\ est\ constant) \end{cases}$. $P^{(0)} = P$ et $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $P^{(j)} = \left(P^{(j-1)}\right)'$ est le polynôme dérivé $j^{ème}$ de P.

- **Opération sur les polynômes dérivés (dérivés d'une somme, produit, composée)**

Leibniz $(PQ)^{(N)} = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} P^{(j)} Q^{(N-j)}$

Composée particulière $(P \circ (X + a))^{(N)} = P^{(j)}(X + a)$
Dérivée première d'un produit fini de polynômes $(\prod_{k=1}^{S} P_k)' = \sum_{j=0}^{s} P_j' \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{S} P_k$

- **Expression et degré des polynômes dérivés successifs.**

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. $\forall j \in \mathbb{N}$, $P^{(j)} = \begin{cases} \sum_{k=j}^{p} \frac{k!}{(k-j)!} a_k X^{k-j} & \text{si } \deg(P) \geq \text{j}. \\ 0 & si \deg(P) < j. \,(i.e. P\ est\ constant) \end{cases}$ et $a_j = \frac{P^{(j)}(0)}{j!}$.

- **Formule de Taylor (existence et unicité du développement de Taylor en scalaire α).**

Si $P \in K_n[X]\ et\ \alpha \in K$ alors P s'écrit de **manière unique** comme combinaison linéaire des $(X - \alpha)^k$ tq $k \in [\![0, n]\!]$ $et\ l'écriture\ est$ $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$.

III Divisibilité

- **Définition de « B divise A » ou B est un diviseur de A.**

Soit $A\ et\ B$ deux polynômes de $K[X]$. On dit que B divise A (dans $K[X]$) lorsqu' il existe un polynôme Q (de $K[X]$) tel que : $A = BQ$.

- **Définition d'un polynôme associé, d'un polynôme irréductible. Exemple des polynômes de degré 1.**
- **Théorème de la division euclidienne.**

Soit $A\ et\ B$ deux éléments $K[X]$ tels que $B \neq 0$. Alors il existe un unique polynôme Q et un unique polynôme R tels que : $A = BQ + R$ **et** $degR < degB$.

- **Caractérisation de « B divise A » par le reste de la division euclidienne de A par B.**

B divise A si et ssi le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

IV Racines d'un polynôme

- **Définition d'une racine. Théorème fondamental de caractérisation d'une racine(sans multiplicité) par factorisation.**

Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$.
α est une racine de P (dans K) lorsque $\tilde{P}(\alpha) = 0$.
α est racine de P si et ssi $X - \alpha$ divise P.

- **Racines multiples : définition et caractérisation d'une racine multiple par les polynômes dérivés.**

Soit $P \in K[X]$, $\alpha \in K$ et $m \in \mathbb{N}$.
α est une racine de P **d'ordre de multiplicité (exactement) m** lorsqu'il existe $Q \in K[X]$ tq $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$ et $\tilde{Q}(\alpha) \neq 0$.
α est une racine de P **d'ordre de multiplicité au moins m** lorsqu'il existe $Q \in K[X]$ tq $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$.
α est une racine de P d'ordre de multiplicité **(exactement)** m **si et ssi** pour tout $k \in \{0, .., m-1\}, \tilde{P}^{(k)}(\alpha) = 0\ et\ \tilde{P}^{(m)}(\alpha) \neq 0$
α est une racine de P d'ordre de multiplicité **au moins** m **si et ssi** pour tout $k \in \{0, .., m-1\}, \tilde{P}^{(k)}(\alpha) = 0$

- **Relation entre le degré et le nombre de racines : nombre maximal de racines d'un polynôme non nul, caractérisation du polynôme nul par son nombre de racines.**

•Si P est un polynôme non nul alors le nombre de racines de P (distinctes ou comptées avec leur multiplicité) est inferieur ou égal à $\deg(P)$.
•Seul le polynôme nul a un nombre de racines (distinctes ou comptées avec leur multiplicité) strictement supérieur à son degré.

Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus.
Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaitre :
Q1: Théorème fondamental de l'intégration
Q2 : Lemme d'annulation
Q3: Formule de Taylor pour les polynômes
Q4 : Caractérisation d'une racine (sans multiplicité) par factorisation.
Q5 : Caractérisation d'une racine multiple par les polynômes dérivés.
Q6: Racine complexe non réelle d'un polynôme à coefficients réels.