

**Compter les racines de  $P$  avec leur multiplicité** signifie que une (chaque) racine de  $P$  de multiplicité  $m$  compte pour  $m$  racines de  $P$ . 22bis

Soit  $P \in K[X]$ .  $P$  est dit **scindé** sur  $K$  lorsque  $P$  a un nombre de racines dans  $K$  comptées avec leur multiplicité exactement égal à son degré. Autrement dit ;  $P$  est scindé lorsque :

Ou bien  $P$  est constant non nul

Ou bien  $P$  n'est pas constant et  $P$  s'écrit sous la forme factorisée :

$$P = \lambda (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n) = \lambda \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$$

$$P = \lambda \prod_{k=1}^s (X - \beta_k)^{m_k}$$

où  $n = \deg(P)$  et  $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  des éléments de  $K$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_s$  des éléments **distincts** de  $K$

tq  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \{\beta_1, \dots, \beta_s\} =$  ensemble des racines de  $P$  et  $m_1, \dots, m_s$  entiers naturels strictement positifs. 23

Soit  $P \in K[X]$ .  $P$  est **irréductible** lorsque  $P$  n'est pas constant et les seuls diviseurs de  $P$  sont constants ou de même degré que  $P$ . Les diviseurs d'un polynôme  $P$  irréductible sont donc les polynômes de la forme  $\lambda$  et  $\lambda P$  tq  $\lambda \in K^*$ . Démonstration 24

**Démonstration**

en rassemblant les facteurs identiques (ceux pour lesquels  $\alpha_i = \alpha_j$ )

### Relation coefficients

**Démonstration**

Soit  $P \in K[X]$  non constant et scindé sur  $K$ . Alors

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k = \lambda \prod_{k=1}^d (X - \alpha_k).$$

où  $d = \deg(P)$  et  $a_0, \dots, a_d$  les coefficients de  $P$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  les racines de  $P$  dans  $K$  et  $\lambda$  élément de  $K$ .

Alors  $\lambda = \text{codom}(P) = a_d$  et

la somme de racines de  $P$  vaut  $\sum_{k=1}^d \alpha_k = -\frac{a_{d-1}}{a_d}$  et

le produit de racines de  $P$  vaut  $\prod_{k=1}^d \alpha_k = (-1)^d \frac{a_0}{a_d}$ . 24

### Théorème de d'Alembert Gauss

Tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  non constant admet une racine complexe. 26

### Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

**Démonstration**

Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont les polynômes de degré 1. 27

### La forme scindée dans $\mathbb{C}[X]$ (théo de factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ en produit de facteurs irréductibles)

**Démonstration**

Tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  non nul est scindé sur  $\mathbb{C}$ .

Si  $P \in \mathbb{C}[X]$  tq  $P \neq 0$  et  $d = \deg(P)$  alors il existe des uniques complexes  $\beta_1, \dots, \beta_s$  des complexes **distincts** et  $m_1, \dots, m_s$  entiers naturels strictement positifs tels que

$$P = \lambda \prod_{k=1}^s (X - \beta_k)^{m_k}$$

la forme scindée ou la forme factorisée de  $P$  (en produit de facteurs irréductibles) dans  $\mathbb{C}[X]$

et  $\beta_1, \dots, \beta_s$  sont les racines complexes de  $P$  de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_s$  et  $\forall k \in \llbracket 0, s \rrbracket, \sum_{k=1}^s m_k = d = \deg(P)$ . mais  $\beta_1, \dots, \beta_s$  n'existent pas lorsque  $P$  est constant. 28

### Racine complexe d'un polynôme réel

**Démonstration**

Soit  $P$  est un polynôme à **coefficients réels** et  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $m \in \mathbb{N}$ .  $\alpha$  est racine de  $P$  d'ordre de multiplicité  $m$

**si et seulement si**

$\bar{\alpha}$  est racine de  $P$  d'ordre de multiplicité  $m$ .

**Conséquence :** Tout polynôme non nul à coefficients réels possède un nombre pair de racines complexes non réelles. 22

### Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

**Démonstration**

Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  degré 1 et ceux de degré 2 à discriminant strictement négatif. 29

### Théo de factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles

**Démonstration**

Si  $P \in \mathbb{R}[X]$  tq  $P \neq 0$  et  $d = \deg(P)$  alors il existe des uniques réels  $\beta_1, \dots, \beta_s$  **distincts** et  $m_1, \dots, m_s, q_1, \dots, q_r$  entiers naturels positifs et  $(b_1, c_1), \dots, (b_r, c_r)$  des couples **distincts** de réels que :

la forme factorisée de  $P$  (en produit de facteurs irréductibles) dans  $\mathbb{R}[X]$

$\forall j \in \{1, \dots, r\}, b_j^2 - 4c_j < 0$  et

$$P = \lambda \prod_{k=1}^s (X - \beta_k)^{m_k} \prod_{j=1}^r (X^2 - b_j X + c_j)^{q_j}$$

et  $\beta_1, \dots, \beta_s$  sont les racines réelles de  $P$  de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_s$  et  $\forall k \in \llbracket 0, s \rrbracket, \sum_{k=1}^s m_k + 2 \sum_{k=1}^r q_k = d = \deg(P)$ . mais  $\beta_1, \dots, \beta_s$  n'existent pas lorsque  $P$  n'a pas de racines réelles et  $(b_1, c_1), \dots, (b_r, c_r)$  n'existent pas lorsque  $P$  n'a pas de racines complexes non réelles.

**Conséquence :** Tout polynôme réel de degré impair a au moins une racine réelle. 30

**Egalité de deux polynômes :** Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

$$A = B$$

**si et seulement si**  $A$  et  $B$  ont les mêmes coefficients

**si et seulement si**  $A$  et  $B$  ont le même degré et si ce degré n'est pas  $-\infty$ ,

$A$  et  $B$  ont le même coefficient dominant, les mêmes racines complexes avec, pour chacune, la même multiplicité

**si et seulement si** il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que :  $\forall k \in \mathbb{N}, \widetilde{A}^{(k)}(\alpha) = \widetilde{B}^{(k)}(\alpha)$

**si et seulement si**  $A - B$  a un nombre de racines strictement supérieur à son degré.

**si et seulement si**  $\deg(A - B) < 0$ . 31

**Divisibilité :** Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  tel que  $B$  non nul. Alors,  $B$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ .

$B$  divise  $A$

**si et seulement si**  $\exists Q \in \mathbb{C}[X] / A = BQ$

**si et seulement si** toute racine de  $B$  est racine de  $A$  avec une multiplicité dans  $A$  supérieure ou égale à sa multiplicité dans  $B$

**si et seulement si** le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  est nul. 32