

# Programme de colle 21

## Chap 15 Polynômes à une indéterminée.

### I Généralités

- **Définition d'un polynôme comme une suite presque nulle (nulle à partir d'un certain rang).**

Un polynôme à coefficients dans  $K$  est une suite d'éléments de  $K$  nulle à partir d'un certain rang.

- Soit  $P$  et  $Q, P_1, P_2, \dots, P_s$  des polynômes à coefficients dans  $K, \lambda \in K$  et  $m \in \mathbb{N}$ .

✓ Définition de  $\lambda P, P + Q, PQ$ .

Soit  $P$  et  $Q$  éléments de  $K[X], \lambda \in K$  tels que  $P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$  et  $Q = (b_0, b_1, \dots, b_m, 0, 0, \dots)$ .

$$\lambda P = (\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n, 0, 0, \dots)$$

$$P + Q = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_{\max(n,m)} + b_{\max(n,m)}, 0, 0, \dots)$$

$$PQ = (c_0, c_1, \dots, c_{n+m}, 0, 0, \dots) \text{ où } c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$$

✓ Définition de  $P^m$ , d'une combinaison linéaire de  $P$  et  $Q$ .

$$P^0 = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, P^k = P^{k-1}P = \underbrace{P \times P \times \dots \times P}_{m \text{ fois}}$$

Une combinaison linéaire de  $P$  et  $Q$  est tout polynôme qui peut s'écrire sous la forme  $aP + bQ$  où  $a$  et  $b$  éléments de  $K$ .

Une combinaison linéaire de  $P_1, P_2, \dots, P_s$  est tout polynôme qui peut s'écrire sous la forme  $\sum_{k=1}^s a_k P_k$  où  $a_1, \dots, a_s$  éléments de  $K$ .

- **Définition du polynôme  $X$ . Calcul de  $X^k$ .**

$X = (0, \underbrace{1}_{\text{rang } 1}, 0, 0, \dots)$  est appelée l'indéterminée

$\forall k \in \mathbb{N}, X^k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{rang } k}, 0, \dots)$  est appelée l'indéterminée

- **Nouvelle définition (écriture sous forme développée) d'un polynôme :**

Un polynôme à coefficient dans  $K$  s'écrit de manière unique sous la forme  $\sum_{k=0}^n a_k X^k$  où  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_0, \dots, a_n$  éléments de  $K$  sont les coefficients de  $P$ .  
combinaison linéaire de  $1, X, X^2, \dots, X^n$

On note  $K[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $K$ .

Deux polynômes sont égaux s'ils ont les mêmes coefficients.

Un polynôme constant est un polynôme de forme  $aX^0$   $a \in K$  et est noté tout simplement  $a$ .

- **Nouvelle expression  $\lambda P, P + Q, PQ, P^m$ . Définition de  $P \circ Q$ . Combinaison linéaire de polynômes.**

Soit  $P$  et  $Q$  éléments de  $K[X], \lambda \in K$  tels que  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ .

$$\lambda P = \sum_{k=0}^n \lambda a_k X^k$$

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k$$

$$PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \text{ où } c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$$

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^n a_k Q^k$$

- **Règles de calcul : élément neutre, opposé, associativité, commutativité, distributivité, calcul de  $X^k X^p$  et  $(X^k)^p$ .**
- **Formule du binôme de Newton et formule de factorisation**
- **Définition du degré d'un polynôme, du coefficient dominant et terme dominant lorsqu'ils existent.**

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in K[X]$ .

Si  $P = 0$  alors  $\text{deg } P = \text{deg}(P) = -\infty$  et  $P$  n'a pas de coefficient dominant ni de terme dominant.

Si  $P \neq 0$  alors  $\text{deg } P = \text{deg}(P) = \max\{k \in \mathbb{N} / a_k \neq 0\}$  et  $\text{codom}(P) = a_{\text{deg}(P)}$  et **terme dominant** de  $P = a_{\text{deg}(P)} X^{\text{deg}(P)}$

- **Formules des degrés de  $P + Q, PQ, \beta P$  et  $P \circ Q$  et formule sur les coefficients dominants lorsqu'ils existent.**

**Généralisation à un produit ou une combinaison linéaire de  $m$  polynômes, à une puissance de polynôme.**

Soit  $P$  et  $Q, P_1, P_2, \dots, P_s$  éléments de  $K[X], \lambda \in K$  tels que  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ .

$$\text{deg}(\lambda P) = \begin{cases} \text{deg}(P) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases} \leq \text{deg}(P). \text{ Et le cas échéant, } \text{codom}(\lambda P) = \lambda \text{codom}(P)$$

$$\text{deg}(P + Q) \leq \max(\text{deg}(P), \text{deg}(Q)). \text{ deg}(P) > \text{deg}(Q) \text{ alors } \text{deg}(P + Q) = \text{deg}(P) \text{ et } \text{codom}(P + Q) = \text{codom}(P)$$

$$\text{deg}(PQ) = \text{deg}(P) + \text{deg}(Q). \text{ Et le cas échéant, } \text{codom}(PQ) = \text{codom}(P) \text{codom}(Q)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{deg}(P^k) = k \text{deg}(P)$$

$$\text{deg}(\prod_{j=1}^s P_j) = \sum_{j=1}^s \text{deg}(P_j). \text{ Et le cas échéant, } \text{codom}(\prod_{j=1}^s P_j) = \prod_{j=1}^s \text{codom}(P_j)$$

$$\text{deg}(\sum_{j=1}^s \lambda_j P_j) \leq \max(\text{deg}(P_1), \text{deg}(P_2), \dots, \text{deg}(P_s)). \text{ Et si l'un des polynômes } P_1, P_2, \dots, P_s \text{ a un degré strictement supérieur à tous les autres alors}$$

$$\text{deg}(\sum_{j=1}^s \lambda_j P_j) \text{ est égal au degré de ce polynôme et } \text{codom}(\sum_{j=1}^s \lambda_j P_j) \text{ est égal au coefficient dominant de ce polynôme.}$$

$$\text{Si } Q \text{ non constant alors } \text{deg}(P \circ Q) = \text{deg}(Q) \times \text{deg}(P)$$

- **Intégrité du produit polynomial**

Soit  $P$  et  $Q$  éléments de  $K[X]. PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0$  ou  $Q = 0$ .

- **Ensemble note  $K_n[X]$**

Soit  $n$  un entier naturel. On note  $K_n[X]$  l'ensemble des polynômes (à une indéterminée) à coefficient dans  $K$  et de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Un polynôme de  $K_n[X]$  s'écrit de manière unique sous la forme  $\sum_{k=0}^n a_k X^k$  i.e. comme combinaison linéaire des  $X^k$   $tq k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

- **Fonction polynomiale associée**

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in K[X]$ . Alors la fonction polynomiale associée à  $P$  est  $\tilde{P}: K \rightarrow K$ , telle que  $\forall t \in K, \tilde{P}(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ .

Soit  $P, Q \in K[X]$  et  $\lambda \in K. \lambda \tilde{Q} = \tilde{\lambda Q}$  et  $\tilde{P+Q} = \tilde{P} + \tilde{Q}$  et  $\tilde{PQ} = \tilde{P} \tilde{Q}$  et  $\tilde{P \circ Q} = \tilde{P} \circ \tilde{Q}$ .

## II Polynômes dérivés

- Définition des polynômes dérivés successifs.**

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ .  $P^{(1)} = P' = \begin{cases} \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} & \text{si } \deg(P) \geq 1. \\ 0 & \text{si } \deg(P) \leq 0. \text{ (i.e. } P \text{ est constant)} \end{cases}$ .  $P^{(0)} = P$  et  $\forall j \in \mathbb{N}^*$ ,  $P^{(j)} = (P^{(j-1)})'$  est le polynôme dérivé  $j^{\text{ème}}$  de  $P$ .

- Opération sur les polynômes dérivés (dérivés d'une somme, produit, composée)**

Soit  $P, Q \in K[X]$  et  $\lambda \in K$ .  $(\lambda Q)' = \lambda Q'$ ,  $(P + Q)' = P' + Q'$  et  $(PQ)' = P'Q + PQ'$

Leibniz  $(PQ)^{(N)} = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} P^{(j)} Q^{(N-j)}$

Composée particulière :  $(P \circ (X + a))^{(N)} = P^{(N)}(X + a)$

Fonction polynomiale dérivée :  $\tilde{P}' = \tilde{P}'$ .

- Expression et degré des polynômes dérivés successifs.**

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ .  $\forall j \in \mathbb{N}$ ,  $P^{(j)} = \begin{cases} \sum_{k=j}^n \frac{k!}{(k-j)!} a_k X^{k-j} & \text{si } \deg(P) \geq j. \\ 0 & \text{si } \deg(P) < j. \text{ (i.e. } P \text{ est constant)} \end{cases}$  et  $a_j = \frac{P^{(j)}(0)}{j!}$ .

- Formule de Taylor (existence et unicité du développement de Taylor en scalaire  $\alpha$ ).**

Si  $P \in K_n[X]$  et  $\alpha \in K$  alors  $P$  s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des  $(X - \alpha)^k$   $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et l'écriture est

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k.$$

## III Divisibilité

- Définition de « B divise A » ou B est un diviseur de A.**

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes de  $K[X]$ . On dit que  $B$  divise  $A$  (dans  $K[X]$ ) lorsqu'il existe un polynôme  $Q$  (de  $K[X]$ ) tel que :  $A = BQ$ .

- Définition d'un polynôme associé, d'un polynôme irréductible. Exemple des polynômes de degré 1.**

- Théorème de la division euclidienne.**

Soit  $A$  et  $B$  deux éléments  $K[X]$  tels que  $B \neq 0$ . Alors il existe un unique polynôme  $Q$  et un unique polynôme  $R$  tels que :  $A = BQ + R$  et  $\deg R < \deg B$ .

- Caractérisation de « B divise A » par le reste de la division euclidienne de A par B.**

$B$  divise  $A$  si et ssi le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  est nul.

## IV Racines d'un polynôme

- Définition d'une racine. Théorème fondamental de caractérisation d'une racine (sans multiplicité) par factorisation.**

Soit  $P \in K[X]$  et  $\alpha \in K$ .  $\alpha$  est une racine de  $P$  (dans  $K$ ) lorsque  $\tilde{P}(\alpha) = 0$ .

$\alpha$  est racine de  $P$  si et ssi  $X - \alpha$  divise  $P$ .

- Racines multiples : définition et caractérisation d'une racine multiple par les polynômes dérivés.**

Soit  $P \in K[X]$ ,  $\alpha \in K$  et  $m \in \mathbb{N}$ .

$\alpha$  est une racine de  $P$  d'ordre de multiplicité (exactement)  $m$  lorsqu'il existe  $Q \in K[X]$  tq  $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$  et  $\tilde{Q}(\alpha) \neq 0$ .

$\alpha$  est une racine de  $P$  d'ordre de multiplicité au moins  $m$  lorsqu'il existe  $Q \in K[X]$  tq  $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$ .

$\alpha$  est une racine de  $P$  d'ordre de multiplicité (exactement)  $m$  si et ssi pour tout  $k \in \{0, \dots, m-1\}$ ,  $\tilde{P}^{(k)}(\alpha) = 0$  et  $\tilde{P}^{(m)}(\alpha) \neq 0$

$\alpha$  est une racine de  $P$  d'ordre de multiplicité au moins  $m$  si et ssi pour tout  $k \in \{0, \dots, m-1\}$ ,  $\tilde{P}^{(k)}(\alpha) = 0$

- Racines complexes d'un polynôme à coefficients réels**

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $m \in \mathbb{N}$ .  $\alpha$  est racine de  $P$  d'ordre de multiplicité  $m$  si et ssi  $\bar{\alpha}$  est racine de  $P$  d'ordre de multiplicité  $m$ .

**Conséquence :** Un polynôme à coefficients réels possède un nombre pair de racines complexes non réelles.

- Relation entre le degré et le nombre de racines : nombre maximal de racines d'un polynôme non nul, caractérisation du polynôme nul par son nombre de racines.**

• Si  $P$  est un polynôme non nul alors le nombre de racines de  $P$  (distinctes ou comptées avec leur multiplicité) est inférieur ou égal à  $\deg(P)$ .

• Seul le polynôme nul a un nombre de racines (distinctes ou comptées avec leur multiplicité) strictement supérieur à son degré. Le polynôme nul est le seul polynôme ayant une infinité de racines.

- Obtention de la forme scindée d'un polynôme.**

Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  des scalaires tous distincts,  $\beta \in K^*$ ,  $m_1, \dots, m_s$  des entiers naturels non nuls et  $P$  un polynôme non nul. Alors,

$$P = \underbrace{\beta (X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_s)^{m_s}}_{\text{forme scindée de } P} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1, \dots, \alpha_s \text{ sont des racines distinctes de } P \text{ d'ordre de multiplicités respectives au moins } m_1, \dots, m_s \\ \text{et } \deg(P) = \sum_{k=1}^s m_k \text{ et } \beta = \text{codom}(P) \end{cases}$$

Dans ce cas,  $P$  n'a pas d'autres racines et  $m_1, \dots, m_s$  sont les multiplicités exactes de  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  dans  $P$ .

- Relation coefficients-Racines**

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que :  $n = \deg(P) \geq 1$  et  $P = a_n (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ .

Alors  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$  et  $\prod_{k=1}^n \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

somme des racines de P pas forcément distinctes      produit des racines de P

## V Factorisation en produit de facteurs irréductibles

### 1. Dans $\mathbb{C}[X]$

- Théorème de d'Alembert-Gauss**

Tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  admet au moins une racine complexe.

- Polynômes irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$**

Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont les polynômes de degré 1.

- **Factorisation en produit de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$**

Tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  est scindé dans  $\mathbb{C}[X]$ , admet un nombre de racines comptées avec leur multiplicité égale à son degré.

- **Critère de divisibilité.**

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes tq  $B$  non nul.

$B$  divise  $A$  **si et ssi** les racines complexes de  $B$  sont racines de  $A$  avec une multiplicité dans  $A$  supérieure ou égale à celle dans  $B$ .

## 2. Dans $\mathbb{R}[X]$

- **Polynômes irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$**

Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré deux à discriminant strictement négatif

- **Factorisation en produit de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$**

Tout polynôme non constant de  $\mathbb{R}[X]$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$P = \text{codom}(P) \left[ \underbrace{\prod_{k=1}^s (X - \alpha_k)^{m_k}}_{\substack{\text{facteurs avec les racines réelles} \\ \text{de } P \\ \text{n'existe pas si } P \text{ n'a pas de} \\ \text{racines réelles}}} \right] \left[ \underbrace{\prod_{k=1}^r (X^2 + b_k X + c_k)^{p_k}}_{\substack{\text{facteurs avec les racines} \\ \text{complexes conjuguées} \\ \text{de } P \\ \text{n'existe pas si } P \text{ n'a que de} \\ \text{racines réelles}}} \right] \text{ avec } \forall k, \alpha_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}, m_k \in \mathbb{N}^*, p_k \in \mathbb{N}^* \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, r\}, b_k^2 - 4c_k < 0$$

**csq** Tout polynôme de degré impair et à coefficients réels a au moins une racine réelle.

### Savoir-faire :

1. trouver les racines d'un polynôme  $P$  et la multiplicité de chaque racine
  - ✓ trouver des racines évidentes  $\alpha, \beta \dots$  et leurs multiplicités respectives  $m$  et  $q \dots$  dans  $P$  et factoriser  $P$  par  $(X - \alpha)^m (X - \beta)^q \dots$  puis recommencer avec l'autre facteur.
  - ✓ résoudre  $\tilde{P}(z) = 0$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  pour trouver toutes les racines complexes puis déterminer la multiplicité de chacune de ces racines.
2. déterminer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $B$  où  $P$  et  $B$  polynômes donnés
  - ✓ poser la division euclidienne lorsque  $\text{deg}(P)$  est défini.
  - ✓ écrire la division euclidienne théorique, écrire le reste sous forme développée et trouver ses coefficients en utilisant les racines de  $B$  et leur multiplicité
3. montrer qu'un polynôme  $B$  divise un autre polynôme  $A$ 
  - ✓ poser la division euclidienne et vérifier que le reste est nul
  - ✓ utiliser les racines de  $B$  et leur multiplicité
4. factoriser un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  sous forme scindée
5. factoriser un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  en produit de facteurs irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$
6. calculer la somme et le produit des racines d'un polynôme dont on connaît la forme développée mais dont on ne connaît pas les valeurs de racines.

**Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus.**

**Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaître :**

**Q1 :** Caractérisation d'une racine (sans multiplicité) par factorisation

**Q2 :** Caractérisation d'une racine multiple par les polynômes dérivés

**Q3 :** Racine complexe non réelle d'un polynôme à coefficients réels

**Q4 :** Formule de Taylor pour les polynômes.