

Préparation du DC de lundi 23 mars 26.

**Apprendre les formules du produit de deux polynômes et celui de deux matrices .
Travailler les exercices suivants (attention le dernier n'a pas été fait en classe !!!)**

Soit n un entier strictement positif et $P_n = \frac{1}{2i} [(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}]$.

1. Montrer que P_n appartient à $\mathbb{R}[X]$. Préciser le terme dominant de P_n .
2. Montrer que P_n est scindé sur \mathbb{R} (dans $\mathbb{R}[X]$) et déterminer sa forme scindée.
3. Montrer qu'il existe un polynôme Q_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X) = Q_n(X^2)$.
4. Factoriser Q_n sous forme scindée dans $\mathbb{R}[X]$.
5. Calculer les sommes : $S_n = \sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ et $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.
6. Prouver l'inégalité suivante : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x}$.
7. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

$$P_n \stackrel{FBN}{=} \frac{1}{2i} \left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (i)^k X^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-i)^k X^{2n+1-k} \right] = \frac{1}{2i} \left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (i^k - (-i)^k) X^{2n+1-k} \right] = \frac{1}{2i} \left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (1 - (-1)^k) i^k X^{2n+1-k} \right]$$

$$P_n = \frac{1}{2i} \left[\sum_{\substack{k=0 \\ \text{impair}}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 2i^k X^{2n+1-k} \right] = \frac{1}{i} \left[\sum_{1 \leq 2p+1 \leq 2n+1} \binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1} X^{1n+1-2p-1} \right] = \frac{1}{i} \left[\sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p i X^{2n-2p} \right]$$

$$P_n = \left[\sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p X^{2(n-p)} \right] = \left[\sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p X^{2n-2p} \right].$$

J'en déduis que P_n est à coefficients réels (et même entiers) et $\deg P_n = 2n$ et $\text{codom}(P_n) = \binom{2n+1}{1} = 2n+1$.

9. Soit z un nombre complexe.

$$\overline{P_n}(z) = 0 \Leftrightarrow (z+i)^{2n+1} = (z-i)^{2n+1} \Leftrightarrow \frac{(z+i)^{2n+1}}{(z-i)^{2n+1}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} \text{ est racine } (2n+1)\text{ème de l'unité}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \frac{z+i}{z-i} = e^{2i \frac{k\pi}{2n+1}} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, z \left(1 - e^{2i \frac{k\pi}{2n+1}} \right) = (-i) \left(1 + e^{2i \frac{k\pi}{2n+1}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, z \left(1 - e^{2i \frac{k\pi}{2n+1}} \right) = (-i) \left(1 + e^{2i \frac{k\pi}{2n+1}} \right)$$

car l'égalité est impossible pour $k=0$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, z = \frac{(-i) \left(1 + e^{2i \frac{k\pi}{2n+1}} \right)}{\left(1 - e^{2i \frac{k\pi}{2n+1}} \right)} = \frac{(-i) 2 \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) e^{i \frac{k\pi}{2n+1}}}{(-2i) \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) e^{i \frac{k\pi}{2n+1}}} = \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

Or, $\forall k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, \frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. De plus, \tan est injective sur $]0, \pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (puisque strictement croissante et strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et strictement croissante et strictement négative sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$). Donc, les réels $\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \text{ tq } k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ sont tous distincts et sont donc

$2n$ racines distinctes de P_n . Comme $\deg(P_n) = 2n$, ces racines sont toutes simples dans P_n et P_n est scindée sur \mathbb{R} tel que :

$$P_n = (2n+1) \prod_{k=1}^{2n} \left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right).$$

$$10. P_n = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p X^{2(n-p)} = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p (X^2)^{(n-p)} = Q_n(X^2) \text{ avec } Q_n(X) = \sum_{p=0}^n \underbrace{\binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p}_{a_{n-p}} X^{(n-p)}.$$

z^2 racine de $Q_n \Leftrightarrow Q_n(z^2) = 0 \Leftrightarrow P_n(z) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, z = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$. Donc les réels $u_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ tels que $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ sont

racines de Q_n . Ces racines ne peuvent pas être distinctes car $\deg(Q_n) = n$ donc Q_n a au plus n racines distinctes.

Mais $\frac{1}{\tan\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\pi + \frac{(-k)\pi}{2n+1}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{(-k)\pi}{2n+1}\right)} = \frac{1}{(-\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right))} = -\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$. Donc $u_1 = u_{2n}, u_2 = u_{2n-1}, \dots, u_{n-1} = u_{2n-(n-1)}$. De plus, \tan

est strictement croissante et positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc les réels $u_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ tels que $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont

distincts. Ainsi les réels $u_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ tels que $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont n racines distinctes de Q_n . Comme $\deg(Q_n) = n$, les réels $\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ tels

que $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont les seules racines de Q_n et sont toutes simples dans Q_n . Enfin, $\text{codom}(Q_n) = \text{codom}(P_n) = 2n+1$. Ainsi, $Q_n =$

$$(2n+1) \prod_{k=1}^n \left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right).$$

$$11. S_n = \sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \text{somme des racines de } Q_n = -\frac{\text{coeff de } X^{n-1} \text{ de } Q_n}{\text{codom}(Q_n)} = -\frac{(-1)^1 \binom{2n+1}{3}}{(-1)^0 \binom{2n+1}{1}} = \frac{\binom{2n+1}{3}}{2n+1} = \frac{\frac{(2n+1)!}{3!(2n-2)!}}{2n+1} = \frac{2n-1}{3}$$

$$\text{et } T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right) = \sum_{k=1}^n \left[1 + \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right] = n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$$

$$12. \text{ Soit } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \sin^2(x) \leq x^2 \leq \tan^2(x) \Leftrightarrow \sin(x) \leq x \leq \tan(x).$$

\Leftrightarrow
car $\sin(x) \geq 0$
et $\tan(x) \geq 0$

Or, \sin est concave sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et \tan est convexe sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ (car $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin''(x) = -\sin(x) < 0$ et $\tan''(x) = 2(1 + \tan^2(x)) \tan(x) > 0$). Donc sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, la courbe de \sin est en-dessous de sa tangente en 0 et la courbe de \tan est au-dessus de sa tangente en 0. Ainsi, car $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ et finalement $\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)}$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, comme $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leq \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

Alors, $\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ i.e. $T_n \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq S_n$. Ainsi, $\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$.

Or, $\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n^2\pi^2}{3(4n^2)} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n^2\pi^2}{3(4n^2)} = \frac{\pi^2}{6}$. Donc, les deux suites qui encadrent $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ tendent vers la même limite $\frac{\pi^2}{6}$. J'en conclus que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient $P(X+1) = P(X)$.
- En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $(X+3)P(X) = XP(X+1)$.

1. Les polynômes P constants vérifient $P(X+1) = P(X)$.

Soit P un polynôme non constant. Imaginons un instant que $P(X+1) = P(X)$. Donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $\tilde{P}(z+1) = \tilde{P}(z)$.

P étant non constant, le théorème de d'Alembert Gauss, P admet au moins une racine complexe α . Alors $\tilde{P}(\alpha) = 0$. Alors $\tilde{P}(\alpha+1) = \tilde{P}(\alpha) = 0$. Donc, $\alpha+1$ est racine de P . Alors $\tilde{P}(\alpha+2) = \tilde{P}(\alpha+1) = 0$. Donc, $\alpha+2$ est racine de P . On montre alors facilement par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\alpha+k$ est racine de P . Ainsi, P a une infinité de racines donc P est le polynôme nul ce qui contredit le fait que P n'est pas constant. Ainsi, il n'existe pas de polynôme non constant vérifiant $P(X+1) = P(X)$ et les polynômes constants sont les solutions de notre problème.

2. Le polynôme nul est solution et c'est le seul polynôme constant solution car si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(X+3)\lambda = X\lambda \Leftrightarrow 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

Analyse : Soit P un polynôme non constant.

Supposons que $XP(X+1) = (X+3)P(X)$. Donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $z\tilde{P}(z+1) = (z+3)\tilde{P}(z)$.

En particulier pour $z = 0$, $0\tilde{P}(1) = (3)\tilde{P}(0)$ et ainsi, $\tilde{P}(0) = 0$.

En particulier pour $z = -1$, $(-1)\tilde{P}(0) = (2)\tilde{P}(-1)$ et ainsi, $\tilde{P}(-1) = 0$.

En particulier pour $z = -2$, $(-2)\tilde{P}(-1) = \tilde{P}(-2)$ et ainsi, $\tilde{P}(-2) = 0$.

Donc $0, -1$ et -2 sont racines de P . Alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P(X) = X(X+1)(X+2)Q(X)$.

Alors $XP(X+1) = (X+3)P(X)$ s'écrit $X(X+1)(X+2)(X+3)Q(X+1) = (X+3)X(X+1)(X+2)Q(X)$.

Donc, $X(X+1)(X+2)(X+3)[Q(X+1) - Q(X)] = 0$.

Comme le polynôme $X(X+1)(X+2)(X+3)$ n'est pas le polynôme nul (puisque son coeff de X^4 est nbn nul, vaut 1) et que la multiplication interne de $\mathbb{R}[X]$ est intégrée, je peux affirmer que $Q(X+1) - Q(X) = 0$ i.e. $Q(X+1) = Q(X)$.

Alors d'après ce qui précède, Q est un polynôme constant. Ainsi, $P(X) = \lambda X(X+1)(X+2)$ tel que $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (car P non constant)

Donc, les candidates solutions non constantes de notre problème sont de la forme $\lambda X(X+1)(X+2)$ tel que $\lambda \in \mathbb{R}^*$

Synthèse : Soit $P = \lambda X(X+1)(X+2)$ tel que $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors $XP(X+1) = X\lambda X(X+1)(X+2)(X+3) = (X+3)P(X)$. Donc P est bien solution.

Ainsi, les solutions de notre problème sont tous les polynômes de la forme $\lambda X(X+1)(X+2)$ tq $\lambda \in \mathbb{R}$ (pour $\lambda = 0$, on retrouve le polynôme nul).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = P^{(n)}$, nième polynôme de Legendre.

1. Quel est le degré de L_n et $\text{codom}(L_n)$?

2. Donner, en utilisant Leibniz, une expression de L_n . En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

3. Justifier que : pour tout $l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $X^2 - 1$ divise $P^{(l)}$.

4. Montrer que : pour tout $l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $P^{(l)}$ a au moins l racines distinctes dans $] -1, 1[$.

5. En déduire que L_n est scindé sur \mathbb{R} et que toutes ses racines sont dans $] -1, 1[$.

1. $P = (X^2 - 1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$ et $P = (X^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{2k}$.

D'après la FBN, le terme dominant de P est X^{2n} . En particulier $\text{deg} P = 2n > n$. Donc, $L_n \neq 0$ et le terme dominant de L_n est $(X^{2n})^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!} X^n$. Ainsi $\text{deg}(L_n) = n$ et $\text{codom}(L_n) = \frac{(2n)!}{n!}$.

2. D'après Leibniz, $L_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((X-1)^n)^{(k)} ((X+1)^n)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (X-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} (X+1)^k$

Ainsi, $L_n = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k$.

Or, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{deg} \left(\binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k \right) = \text{deg} \left(\binom{n}{k}^2 \right) + \text{deg}((X-1)^{n-k}) + \text{deg}((X+1)^k) = 0 + n - k + k = n$.

Donc, Comme $\text{deg}(L_n) = n$, $\text{codom}(L_n) = \sum_{k=0}^n \text{codom} \left(\binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

J'en déduis que $n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!}$. Donc, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!^2} = \binom{2n}{n}$.

RQUE: on a une autre expression de L_n :

$$L_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (X^{2k})^{(n)} \stackrel{p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \text{ si } n \text{ pair}}{\stackrel{p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \text{ si } n \text{ impair}}{=}} \sum_{k=p}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (X^{2k})^{(n)} = \sum_{k=p}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{(2k)!}{(2k-n)!} X^{2k-n}$$

3. 1 et -1 sont les racines de P et sont de multiplicité exactement n dans P .

Donc, pour tout $l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, 1 et -1 sont racines de $P^{(l)}$. Donc, pour tout $l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $X^2 - 1$ divise $P^{(l)}$.

4. Je sais que $\tilde{P}(1) = \tilde{P}(-1)$. De plus, \tilde{P} est continue et dérivable sur $[-1, 1]$ donc le théorème de Rolle assure que : \tilde{P}' s'annule sur $] - 1, 1[$ en un réel $c_{1.1}$.

Alors, $\tilde{P}'(1) = \tilde{P}'(c_{1.1}) = \tilde{P}'(-1) = 0$. De plus, \tilde{P}' est continue et dérivable sur $[-1, 1]$ donc le théorème de Rolle assure que \tilde{P}'' s'annule sur $] - 1, c_{1.1}[$ et sur $] c_{1.1}, 1[$ en un réel $c_{2.1}$ et $c_{2.2}$.

Soit $l \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ Supposons que, $P^{(l)}$ a au moins l racines distinctes $c_{l.1}, c_{l.2}, \dots, c_{l.l}$ dans $] - 1, 1[$ tq $-1 < c_{l.1} < c_{l.2} < \dots < c_{l.l} < 1$.

Comme je sais de plus que $P^{(l)}(1) = P^{(l)}(-1)$, j'ai donc : $P^{(l)}(-1) = P^{(l)}(1) = P^{(l)}(-1) = \dots = P^{(l)}(-1)$. De plus, $\tilde{P}^{(l)}$ est continue et dérivable sur $[-1, 1]$ donc le théorème de Rolle assure que $\tilde{P}^{(l+1)}$ s'annule sur $] - 1, 1[$ en $c_{l+1.1}, c_{l+1.2}, \dots, c_{l+1.l+1}$ tq $-1 < c_{l+1.1} < c_{l+1.2} < \dots < c_{l+1.l+1} < 1$.

5. En appliquant le théorème de Rolle à $P^{(n-1)}$ qui s'annule $(n-1)$ fois entre -1 et 1 en $c_{n-1.1}, c_{n-1.2}, \dots, c_{n-1.n-1}$ tq $-1 < c_{n-1.1} < c_{n-1.2} < \dots < c_{n-1.n-2} < c_{n-1.n-1} < 1$. et qui s'annule en 1 et -1 , le théorème de Rolle assure

que $\tilde{L}_n = \tilde{P}^{(n)}$ s'annule sur $] - 1, 1[$ en $c_{n.1}, c_{n.2}, \dots, c_{n.n}$ tels que tq $-1 < c_{n.1} < c_{n-1.1} < c_{n.2} < c_{n-1.2} < \dots < c_{n.n-1} < c_{n-1.n-1} < c_{n.n}$.

6. Donc, $c_{n.1}, c_{n.2}, \dots, c_{n.n}$ sont distinctes n racines réelles distinctes de L_n et sont strictement comprises entre -1 et 1 .

Comme $\deg(L_n) = n$, les réels $c_{n.1}, c_{n.2}, \dots, c_{n.n}$ sont les seules racines de L_n et elles sont toutes simples dans L_n et L_n est scindée sur \mathbb{R} et ses racines sont toutes dans $] - 1, 1[$.